

令和元年6月18日現在

機関番号：32665

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17522

研究課題名（和文）Vojta予想解決に向けた代数多様体上の整数点と数論的力学系の研究

研究課題名（英文）Vojta's conjecture, integral points on algebraic varieties, and arithmetic dynamics

研究代表者

安福 悠 (YASUFUKU, Yu)

日本大学・理工学部・准教授

研究者番号：00585044

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：ディオファントス幾何とは多変数多項式の整数解や有理数解について研究する分野で、Vojta予想はその中の最重要課題の一つである。本研究では、射影平面からブローアップと呼ばれる作業を繰り返した曲面の上で、Vojta予想を部分解決した。また、射影平面上における整数点集合が沢山ある場合と沢山ない場合を特徴づけた。自己写像の多重合成を分析する力学系の分野では、一つの3次多項式に関して、合成を繰り返すごとに分母の素因数分解に新しい素数が登場することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

射影平面における整数点集合の特徴づけでは、アフィン代数幾何という1980年代から主に日本で研究されてきた分野を、初めて整数論に応用した。これをきっかけにアフィン代数幾何が整数論の世界でもより注目されることになり、新たな応用が生まれる可能性もある点で学術的意義の高い結果である。また、軌道の点の素因数分解を用いて暗号を構築できるので、楕円曲線暗号の次となり得る暗号の安全性研究の土台となる点で、社会的意義もある。

研究成果の概要（英文）：Diophantine geometry is a study on integral and rational solutions to multivariable polynomials, and Vojta's conjecture is one of the most important conjectures in this field. During the span of this grant, I proved a special case of Vojta's conjecture on surfaces which can be obtained as multiple blowups of the projective plane. Moreover, we characterized when the set of integral points for complements of the projective plane can be large, using affine algebraic geometry and the notion of weights of fibration introduced by Campana. In the field of arithmetic dynamics where we study iterations of self-maps, we showed that the denominator of each point in an orbit under a certain cubic polynomial contains a new prime in its prime factorization.

研究分野：代数学（ディオファントス幾何）

キーワード：Vojta予想 整数点 数論的力学系 ブローアップ 最大公約数

## 1. 研究開始当初の背景

ディオファントス幾何とは、多変数多項式の整数解や有理数解について、幾何学的に分析する分野である。最重要課題の一つが本研究題目の Vojta 予想で、Vojta が予想を提唱してから 30 年たった研究開始当初も、いくつかの特殊な場合を除いて未解決であった。特に整数点に関しては、90 年代の Vojta と Faltings の結果、2000 年代の Corvaja-Zannier の結果が主な状態であった。

軌道とは、ある空間の自己写像を多重合成することにより点がどのように移されていくかを記録したものである。空間全体の整数点分析がたとえ難しかったとしても、一つの軌道に限定して考えれば、整数点分析ができるかもしれない、という発想自体は、1990 年代の Silverman の結果以来あったのだが、この発想を高次元化する可能性を見出しつつあったのが、研究開始当初の状況であった。

## 2. 研究の目的

高次元代数多様体におけるディオファントス近似である Vojta 予想を通して、代数多様体の有理点や整数点の分布を調べるのが本研究の目的である。特に、整数点集合に焦点をあてて、数論的な道具である局所高さを分析する。より具体的には、(1) 代数多様体の整数点集合が退化する必要条件や十分条件の決定、(2) 自己写像による軌道上にある整数点が、退化するような必要条件や十分条件の決定、に取り組む。どちらの問題においても、理論構築だけでなく具体例の分析を進め、ディオファントス近似の改良と双有理幾何やアフィン代数幾何の理論を融合することで、研究を邁進させることが目的である。

## 3. 研究の方法

本研究は主に個人研究であるが、数学の研究の進展には、専門家との研究討議を通して様々なアイデア、考え方、手法などの知見を得ることがかせない。そこで、アラケロフ幾何・力学系・代数幾何・論理学の第一人者を招聘したり、彼らの大学に行ったり、共通の学会に参加したりすることで、研究期間を通して研究討議を行った。特に、研究協力者である Levin 氏 (米国ミシガン州立大)、Tucker 氏 (米国ロチェスター大)、Wang 氏 (台湾中央研究院) とは招聘・訪問・研究集会を通して研究討議を何度も重ねた。その結果、共著論文になった研究も含め、Vojta 予想や数論的力学系の分野の発展に貢献することができた。

## 4. 研究成果

以下、下記 5. の [雑誌論文] の番号に基づき、論文ごとに解説する。

② は、研究協力者 Levin 氏 (米国ミシガン州立大) との共著論文で、アフィン代数幾何を初めて整数論へ応用することに成功した論文である。この結果、射影平面の補集合の整数点集合が沢山ある場合 (Zariski 稠密)、沢山ない場合を特徴づけることができた。より具体的には、対数的小平次元が 0 と  $-\infty$  のときには、アフィン代数幾何の構造定理から完全決定し、対数的小平次元が 1 のときは、fibration に対する Campana の重み付けを活用することで、整数点集合が Zariski 稠密になるような方程式を決定した。

②の後半では射影平面の自己射  $\phi$  による軌道が整数点を沢山持つとき、 $\phi^{-1}(E) = E$  を満たすような Zariski 閉な真部分集合が存在することを、Lang-Vojta 予想というディオファントス幾何の予想から導いた。このような結果は 1 次元では知られているものの、2 次元では初めての結果である。

⑤では、射影平面から多重ブローアップしていった空間上で、Vojta 予想を部分解決した。以前証明した結果 (Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012) と Monatsh. Math. 163 (2011)) では扱えていなかった因子に対して Vojta 予想を解決したことで、新しい最大公約数の不等式を得ることができた。Farey 数列と呼ばれる数列が満たす性質を発見できたことが、証明の鍵となった。

⑧は、本研究開始当初初期していなかった方向の研究である。「軌道の整数点が少ない」という主張は、軌道の点のうち分母が 1 になるものが少ない、という主張なので、「軌道の点の分母の素因数分解には、毎回、今まで出てこなかった素数が登場する」という主張の方がはるかに精密である。このような主張を確かめるのに有益な手法は、力学系ガロア表現の像を決定することである。今回 4 人の著者ととも、特別な 3 次多項式に関してこの決定を行った。その結果、軌道の分母の素因数分解に登場する素数の割合についても言及することができ、新たな知見を得ることができた。

本研究の期間中は、新しい研究について講演を行うだけでなく、これまでの研究を概説する講演を行う機会にも恵まれた。① は 2018 年 12 月に京都大学で行った概説講演の報告で、軌道上の整数点についてや軌道の点の高さの増大度と力学系次数の関連についてまとめた。④は 2018 年 9 月の日本数学会における企画特別講演の報告集で、数論的力学系の分野のうち、アーベル多様体に動機づけられた問題に焦点をあてた。特に、軌道上の整数点、前周期点、力学系ガロア表現、軌道と部分多様体の共通部分についてまとめている。⑥と⑦は、Vojta 予想の研究背景や近年の進展についてまとめており、より幅広い研究者にこの問題を周知することができた。⑨は、近年進展が目覚ましい metric なディオファントス近似についての概説である。このような概説講演やその報告集執筆を通して、研究分野をより盛んにしていく上で必要不可欠な、新しい研究者の参画を促すことに貢献できたと考える。

また、5. の [図書] ①では、高校数学だけを踏まえるところから始めて、整数論やディオファントス近似の理論を易しく解説することで、最終的には Vojta 予想や数論的力学系の紹介まで理解

できるような本を執筆した。数学，特に整数論を目指すきっかけとなり得るものに仕上げることができた。

なお，まだ掲載が確定されていないので，5. に含めることはできないが，研究協力者 Wang 氏とは，Ru-Vojta が導入した双有理不変量を用いて新しい最大公約数の不等式を証明することができ，Vojta 予想を部分解決した。また，研究協力者 Levin 氏，Tucker 氏とは，2 パラメータ軌道と呼ばれる軌道上で整数点の有限性を示せる例を構築した。どちらの論文も本研究期間中に論文を執筆した。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① 安福 悠, 数論的力学系と高さ関数, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, 2019 年掲載受理. 査読あり.
- ② Aaron Levin and Yu Yasufuku, *Integral points and orbits of endomorphisms on the projective plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), no. 2, 971-1002. 査読あり. DOI: 10.1090/tran/7263
- ③ 安福 悠, 書評: 森脇 淳・川口 周・生駒 英晃 「モデル-ファルティングスの定理—ディオファントス幾何からの完全証明」, 数学, 2018 年掲載受理. 査読あり.
- ④ 安福 悠, アーベル多様体と数論的力学系 — 類似と相違, 日本数学会秋季総合分科会 総合講演・企画特別講演報告集 (2018), 69-80. 査読なし.  
[https://app.mathsoc.jp/meeting\\_data/okayama18sept/index-00.html](https://app.mathsoc.jp/meeting_data/okayama18sept/index-00.html)
- ⑤ Yu Yasufuku, *Vojta's Conjecture on Rational Surfaces and the abc conjecture*, Forum Math. **30** (2018), no. 3, 631-649. 査読あり. DOI: 10.1515/forum-2017-0089
- ⑥ 安福 悠, ポエタ予想と最大公約数と力学系, 第 14 回城崎新人セミナー報告集 (2017), 9 pp. 査読なし.  
<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/insei/?KINOSAKI%20SEMINAR%202017/report>
- ⑦ 安福 悠, 有理曲面上のポエタ予想, 第 61 回代数学シンポジウム報告集 (2017), 158-163. 査読なし.  
[http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp\\_past/algsymp16.html](http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp16.html)
- ⑧ Rob Benedetto, Xander Faber, Ben Hutz, Jamie Juul, and Yu Yasufuku, *A Large Arboreal Galois Representation for a Cubic Postcritically Finite Polynomial*, Res. Number Theory **3** (2017), Art. 29, 21 pp. 査読あり. DOI: 10.1007/s40993-017-0092-8
- ⑨ Yu Yasufuku, *Strong, Absolute, and Hyperplane Winning*, Oberwolfach Reports No. 48 (2016), 25-27. 査読なし. DOI: 10.4171/OWR/2016/48
- ⑩ 安福 悠, 軌道上の単数の一様有界性, 京都大学数理解析研究所 講究録 「解析的整数論—数論的対象の分布と近似」, No. 2013 (2016), 152-156. 査読なし.  
<https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/231433>

[学会発表] (計 23 件)

- ① Yu Yasufuku, *Integral points in orbits on the square of the projective line*, アメリカ数学会西部支部会, ハワイ大学, 2019 年 3 月.
- ② Yu Yasufuku, *Height inequalities from cohomological invariants*, 「Higher Dimensional Arithmetic Geometry」, 熊本大学, 2019 年 2 月.
- ③ Yu Yasufuku, *Heights for orbits, and their applications to Zariski-density and integral points*, Workshop on Complex Analytic and Algebraic Methods in Dynamics, 大阪市立大学, 2019 年 1 月.
- ④ 安福 悠, Vojta 予想と数論的力学系の研究, 日本大学理工学部学術講演会 学術賞受賞記念講演, 2018 年 12 月.
- ⑤ 安福 悠, 数論的力学系と高さ関数, 「代数的整数論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2018 年 11 月.
- ⑥ 安福 悠, アーベル多様体と数論的力学系—類似と相違, 日本数学会秋季総合分科会 企画特別講演, 岡山大学, 2018 年 9 月.
- ⑦ Yu Yasufuku, *GCD Problems for Counting Functions and Farey Sequences*, 値分布論研究

会, 東京大学, 2018 年 7 月.

- ⑧ Yu Yasufuku, *Integral Points in One- and Two-Parameter Orbits*, 「Diophantine Analysis and Related Fields」, 慶應義塾大学, 2018 年 3 月.
- ⑨ Yu Yasufuku, *Vojta's Main Conjecture on some Rational Varieties*, 「East Asia Number Theory Conference」, 台湾中央研究院, 2018 年 2 月.
- ⑩ 安福 悠, 力学系 *Mordell-Lang* 問題, 大岡山談話会, 東京工業大学, 2017 年 7 月.
- ⑪ Yu Yasufuku, *Vojta's Main Conjecture on Rational Surfaces*, 台北整数論セミナー, 2017 年 3 月.
- ⑫ 安福 悠, ポエタ予想と最大公約数と力学系, 城崎新人セミナー, 2017 年 2 月.
- ⑬ 安福 悠, 平面曲線の補集合の整数点について, 大阪大学 代数幾何・複素幾何セミナー, 2017 年 1 月.
- ⑭ Yu Yasufuku, *Some Explicit Computations of Dynamical Galois Groups*, 「RIMS Workshop on Complex Dynamics」, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 12 月.
- ⑮ Yu Yasufuku, *Integral Points on Complements of Plane Curves*, 「Arithmetic and Algebraic Geometry」, 東京大学, 2016 年 12 月.
- ⑯ Yu Yasufuku, *Units Satisfying Some Congruences*, 「解析的整数論の諸問題と展望」, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 10 月.
- ⑰ Yu Yasufuku, *Strong, absolute and hyperplane winning*, 「Arbeitsgemeinschaft: Diophantine Approximation, Fractal Geometry and Dynamics」, オーベルヴォルバッハ研究所, 2016 年 10 月.
- ⑱ 安福 悠, 有理曲面上のポエタ予想, 第 61 回代数学シンポジウム, 佐賀大学, 2016 年 9 月.
- ⑲ 安福 悠, 曲面上の *Vojta* 予想と, その値分布類似, 東京工業大学 複素解析セミナー, 2016 年 2 月.
- ⑳ Yu Yasufuku, *Exceptional Sets in 2-dimensional Dynamics and Integral Points*, 「RIMS Workshop on Complex Dynamics」, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 12 月.
- ㉑ Yu Yasufuku, *Some 3-variable Diophantine Equations and Arithmetic Dynamics*, 台北数論セミナー, 国立台湾大学, 2015 年 5 月.
- ㉒ 安福 悠, 3 変数ディオファントス方程式と 2 次元完全不変集合, 明治学院大学数論セミナー, 2015 年 4 月.
- ㉓ Yu Yasufuku, *Campana's Weight and Integral Points on  $\mathbb{P}^2$* , 東京大学複素解析幾何セミナー, 2015 年 4 月.

[図書] (計 1 件)

- ① 安福 悠, 「発見・予想を積み重ねる — それが整数論」, オーム社, 2016 年, 368pp.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.cst.nihon-u.ac.jp/~yasufuku/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究協力者

研究協力者氏名: LEVIN, Aaron

ローマ字氏名: (LEVIN, Aaron)

研究協力者氏名: TUCKER, Thomas

ローマ字氏名: (TUCKER, Thomas)

研究協力者氏名: WANG, Julie Tzu-Yueh

ローマ字氏名: (WANG, Julie Tzu-Yueh)

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。