様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 18 日現在

機関番号：３７１１２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７５２５

研究課題名（和文）数論に現れる周期の独立性に関する研究

研究課題名（英文）Study of independence of periods arising in number theory

研究代表者
三柴　善範（Mishiba, Yoshinori）

福岡工業大学・工学部・助教

研究者番号：７０７３７７２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：有限体上の有理関数体Kに対し，K上の多重ゼータ値(MZV)とCarlitz多重ポリログ(CMPL)の研究を行った(Chieh-Yu Chang氏との共同研究)．正確には，無限/v進CMPLがある具体的なt加群の対数関数の座標に現れることを示した．ここで，vはKの有限素点である．これ用いて，無限進CMPL値がEulerianであることと，対応するv進CMPL値たちが0になることが同値であることを証明した．さらに，v進MZVを定義し，無限進MZVが満たすK上の線形関係式は対応するv進MZVも必ず満たすことを証明した．また，有限CMPLを定義し，K上の有限MZVを有限CMPLを用いて記述した．

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied multiple zeta values (MZV's) over the rational function field K over a finite field, and the Carlitz multiple polylogarithms (CMPL's) (joint work with Chieh-Yu Chang). More precisely, we showed that the infinite/v-adic CMPL's are related to some coordinate of the logarithm of an explicitly constructed t-module at a special point, where v is a finite place of K. By using this formula, we proved that an infinite-adic CMPL at an algebraic point is Eulerian if and only if the corresponding v-adic CMPL's at algebraic points are zero. Moreover, we defined v-adic MZV's and proved that v-adic MZV's satisfy the linear relations that their corresponding infinite-adic MZV's satisfy. We also defined finite CMPL's, and showed that each finite MZV over K is a K-linear combination of finite CMPL's at integral points.

研究分野：数論

キーワード：多重ゼータ値　多重ポリログ　関数体　有限多重ゼータ値　t加群　周期　線形独立性　代数的独立性

１．研究開始当初の背景

Kを有限体上の有理関数体とする．Thakur は標数０における多重ゼータ値の関数体類似として，K の(固定した)無限素点における完備化に値を持つ無限進 Carlitz 多重ゼータ値(以下，無限進 MZV)を定義した．これは Carlitz ゼータ値の一般化になっており，通常の多重ゼータ値との類似性や，関数体特有の現象などについて，研究が行われている．

無限進 MZV の間の関係式の存在については，調和積公式の類似や，Carlitz 基本周期の冪と K の元の積で表される(Eulerian)場合に関する結果等が知られている．また，Anderson-Thakur(深さ 1)と Chang(一般の深さ)により，無限進 MZV は無限進 Carlitz 多重ポリログ(以下，無限進 CMPL)の整点での値を用いて表されることが示されている．しかし，積分表示が得られていない等の理由もあり，標数０の場合に比べると，K 上の線形関係式について十分に知られているとはいえない．

一方で，関係式の非存在性，つまり K 上の線形独立性や代数的独立性については，標数０の世界では手の届きそうにないような結果がこれまでに知られている．線形独立性については，Chang が ABP-criterion と呼ばれる道具を用いることで，重さの異なる無限進 MZV の間には非自明な K 上の(もっと強く，K の代数閉包上の)線形関係式が存在しないことを証明した．代数的独立性については，Chang と Yu が Papanikolas の理論を用いることで，深さ１の無限進 MZV の間には，Euler による Riemann ゼータ関数の偶数点における結果の類似と，インデックスの p 倍で成り立つ自明な関係式(p は K の標数)しか存在しないことを示した．また，研究代表者の三柴により，一般の深さの無限進 MZV の間の代数的独立性についても，いくつかの族に対する結果が示されている．

以上の設定以外でも，多重ゼータ値は活発に研究されている．古庄は，各素数 p に対して p 進多重ゼータ値を定義した．これは通常の多重ゼータ値の p 進類似であり，これまでに興味深い様々な結果が得られている．この関数体類似として，K の有限素点 v に対して，Thakur は v 進 Carlitz 多重ゼータ値(以下，v 進 MZV)を定義した．これは Goss による v 進ゼータ値の一般化になっている．v 進 MZV の間の独立性については，深さ１の場合について，Yu による超越性に関する結果が知られている．しかし，一般の場合についての研究は進んでおらず，その性質の解明が課題であった．

２．研究の目的

以上のような背景の下で，本研究の目的は，数論に現れる周期として様々な設定における多重ゼータ値や多重ポリログ値(代数的点における値)，特に関数体上の設定において，それらの間の線形独立性や代数的独立性に関する研究を推し進めることであった．具体的には，無限進 MZV や無限進 CMPL 値については，これまで示されていた代数的独立性の研究を推し進め，より広いクラスの族に対して，それらの間の代数的独立性を示す．v 進 MZV および v 進 CMPL 値については，これらが対数関数のある座標に現れるような t 加群を具体的に構成する．さらに，Yu による部分 t 加群定理の v 進版を証明することで，v 進 MZV や v 進 CMPL 値の間の線形独立性を示す．

３．研究の方法

研究は t 加群(および t モチーフ)の理論を駆使して行う．Anderson-Thakur は，Carlitz t 加群(のテンソル積をとったもの)の対数関数のある座標に深さ１の無限進/v 進 MZV が現れることを示した．この方法を一般化し，一般の深さの無限進/v 進 MZV および CMPL が対数関数の座標に現れるような t 加群を具体的に構成する．Anderson-Thakur は，一般の深さの無限進 MZV が周期として現れるような t モチーフも構成している．これを用いて，Chang-Papanikolas-Yu は，ある t 加群およびその特殊点を構成した．その対数関数での値の座標を詳しく計算することで，無限進/v 進 Carlitz 多重スターポリログ(以下，CMSPL)が現れることが分かる．Chang の結果により，無限進 MZV は無限進 CMSPL の整点での値の線形結合で記述できるので，ファイバー余積を用いることで無限進 MZV を t 加群の対数関数の座標として実現させる．なお，ここで用いている t 加群の特殊点が対数関数の収束領域に含まれていなければならないので，その計算を行う必要がある．

一方，v 進 MZV については Thakur による定義を採用せず，t 加群を用いた上記の無限進の場合を参考にした定義を与える．これは Thakur によるものとは異なり，v 成分も考慮したより自然な定義であると考えられ，古庄による p 進多重ゼータ値の定義にも類似している．定義のためには，v 進 CMSPL を単位閉円盤に解析接続する必要がある．

以上のように，t 加群の対数関数のある座標として無限進/v 進 MZV を記述し，t 加群の性質を用いることで独立性に関する結果を得る．これには，Yu による部分 t 加群定理や，Carlitz t 加群に関する結果に帰着する議論を行う．

４．研究成果

本研究により得られた結果は大きく分けて以下の３つである．これらは何れも，台湾

の Chieh-Yu Chang 氏との共同研究による.

(1) v 進 CMPL について
　Anderson-Thakur が構成した t モチーフから得られる t 加群およびその特殊点について, Chang-Papanikolas-Yu は理論的な側面から調べていたが, これらを具体的に計算することで, そのある座標に無限進/v 進 CMSPL が現れることを示した. 特に v 進の場合に, この対数関数が単位開円盤で収束することを計算した. また, この表示と t 加群の性質を用いることで, v 進 CMSPL の単位閉円盤への解析接続を与えた. さらに, v 進 CMPL と v 進 CMSPL との関係を与えた.
　この表示から t 加群を Carlitz t 加群(のテンソル積をとったもの)に分解していき, それぞれに Yu による v 進の結果を適用することで, v 進 CMPL の代数的点での値の族が 0 となるための必要十分条件を得た. より正確には, v 進 CMPL の代数的点での値のインデックスを 1 つずつ削っていった族が 0 となること, 対応する v 進 CMSPL 値の族が 0 となること, および上記の t 加群の特殊点が捩れ点であることが同値であることを示した. Chang-Papanikolas-Yu の結果により, この最後の条件が, 対応する無限進 CMPL 値が Eulerian であることと同値であることが分かっている. 以上により, 無限進における周期が Eulerian であることと, v 進における周期が 0 であることの同値性を得ることができた. 以上の結果は論文にまとめた(雑誌論文(2)).

(2) 関数体 K 上の有限 MZV
　有限 MZV の関数体類似として, K 上の有限 MZV および有限 CMPL を考察した. 特に, Thakur による無限進 MZV に対する調和積の類似が, K 上の有限 MZV の間にも成立することを示した. また, K 上の有限 MZV と有限 CMPL の間の明示的な関係式を得た. より正確には, K 上の有限 MZV を有限 CMPL の整点での値の線形結合として表した. これは Chang による無限進における結果の有限類似である. 本研究は当初の計画では想定していなかったが, (1) や(3)についての議論を行っていく中で, 副産物として得られたものである.　以上の結果は論文にまとめた(雑誌論文(1)).

(3) 無限進 MZV と v 進 MZV
　複数の t 加群に対して, それらの対数関数の座標の和が現れるものとして, t 加群(および t モチーフ)のファイバー余積を考察すれば良いことを発見した. また, 無限進 CMSPL が現れる前述の t 加群について, その対数関数の無限進における収束領域を具体的に計算した. その結果, 無限進 MZV を無限進 CMSPL で表す際に必要な点が収束領域に入っていることが確認できた. ここから, ファイバー余積による議論を通して, 無限進 MZV が対数関数の座標に現れる t 加群を構成した. また, この表示と(1)の v 進 CMSPL の単位閉円盤への解析接続を用いて, v 進 MZV の Thakur によるものとは別の定義を与えた.
　さらに, 無限進 MZV が K 上張る線形空間から v 進 MZV が K 上張る線形空間への well-defined な線形写像を構成した(実際には K の代数閉包上でも良い). 具体的には, 無限進 MZV に対し, 同じインデックスの v 進 MZV を対応させる線形写像である. この写像は, well-defined であることが非常に非自明である点に注意する. 実際, 標数 0 においても類似の線形写像の存在が予想されてはいるが, 証明は難しいと考えられている. この結果から, 無限進 MZV の間に K 上の線形関係式が存在すれば, 対応する v 進 MZV の間にも同様の線形関係式が存在することが従う. 特に, ある v 進 MZV たちが K 上線形独立であれば, 対応する無限進 MZV たちも K 上線形独立となる. 以上の結果はプレプリント
Chieh-Yu Chang and Yoshinori Mishiba, Logarithmic Interpretation of Multiple Zeta Values in Positive Characteristic
にまとめ, 現在学術雑誌に投稿中である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）
(1) Chieh-Yu Chang and Yoshinori Mishiba, On finite Carlitz multiple polylogarithms, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 29 (2017), no. 3, 1049--1058, 査読あり.
DOI: 10.5802/jtnb.1011

(2) Chieh-Yu Chang and Yoshinori Mishiba, On Multiple Polylogarithms in Characteristic p: v-Adic Vanishing Versus $¥infty$-Adic Eulerianness, International Mathematics Research Notices (2017), Online, 査読あり.
DOI: 10.1093/imrn/rnx151

(3) Yoshinori Mishiba , On algebraic independence of certain multizeta values in characteristic p, Journal of Number Theory 173 (2017), 512--528, 査読あり.
DOI: 10.1016/j.jnt.2016.09.018

〔学会発表〕（計 5 件）
(1) 三柴 善範, On algebra generators of multiple zeta values in positive characteristic, 関西多重ゼータ研究会, 大阪工業大学, 2017 年 12 月 9 日.

(2) Yoshinori Mishiba, On algebra generators of multiple zeta values in positive characteristic, NCTS One Day Workshop on Multiple Zeta Values in

Positive Characteristic, 国立精華大学(台湾), 2017年9月18日.

(3) 三柴 善範, Carlitz多重ゼータ値の対数表示について, 九州代数的整数論 2017, 九州大学, 2017年3月8日.

(4) Yoshinori Mishiba, On multiple polylogarithms in characteristic p, NCTS Number Theory Seminar, 国立清華大学(台湾), 2016年9月1日.

(5) 三柴 善範, On multiple polylogarithms in characteristic p, 九大代数学セミナー, 九州大学, 2015年12月18日.

６. 研究組織

(1)研究代表者

三柴 善範（MISHIBA Yoshinori）
福岡工業大学・工学部・助教
研究者番号：70737725