様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　３０　年　　６　月　１０　日現在

機関番号：３３９１９
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７５２６

研究課題名（和文）不分岐コホモロジーと高次元の数論的体上の代数曲面に関する研究

研究課題名（英文）Study on unramified cohomology and algebraic surfaces over arithmetic fields of higher dimension

研究代表者
植松　哲也（Uematsu, Tetsuya）

名城大学・理工学部・助教

研究者番号：６０７３５１３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，対角的な定義方程式を持つ代数多様体の不分岐コホモロジーについて考察し，Brauer 群（2次不分岐コホモロジー）について，次の結果を得ることができた。
1．アフィン対角的2次曲面について，3つの係数をパラメーターとしてもつような族を考えたときに，統一的生成元，すなわち，個々のアフィン対角的2次曲面の Brauer 群の生成元を与えるような，代数的にパラメトライズされた生成元の明示公式，が存在しないことを示した。
2．対角的3次曲線の特別な場合である3次フェルマー曲線の Brauer 群について，その3-ねじれ部分群の生成元の明示的な表示を求めた。

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied unramified cohomology of varieties defined by diagonal equations. In particular, for the second unramified cohomology, that is, the Brauer group, we obtained the following results.
1. We found that there does not exist a uniform generator of the Brauer group for a general 3-parametrized family of affine diagonal quadrics.
2. For Fermat curves of degree three, a particular case of diagonal cubic curves, we found an explicit symbolic generator of the 3-torsion part of their Brauer groups.

研究分野：代数学

キーワード：Brauer 群　不分岐コホモロジー　対角的2次曲面　対角的3次曲線　対角的3次曲面　生成元

１．研究開始当初の背景

Brauer 群は，古典的には体に対して定義された不変量であって，例えば，代数的整数論における一つの成果である類体論の証明において重要な役割を果たした。Grothendieck により，代数多様体に対する不変量として拡張された Brauer 群は，その後の研究において，多様体の幾何的な，あるいは，整数論的な性質を反映する不変量であることが明らかにされてきた。例えば，Manin により，代数体上の代数多様体の有理点やゼロサイクルの存在に関する局所大域原理の反例構成の手段としての Brauer-Manin ペアリングが構成された([3])。 また，代数多様体の有理性問題に関連して，Artin-Munford による非有理かつ単有理な 3 次元多様体の構成にも Brauer 群が用いられている。

対角的な代数方程式は数論的に興味ある対象であって，その方程式で定義される多様体の Brauer 群についても，多くの先行研究がある。例えば，対角的 3 次曲面は，対角的な 4 変数 3 次形式から定まる代数曲面である。Manin は 1 つの係数を除いて，係数がすべて 1 であるような対角的 3 次曲面について，その Brauer 群の構造と，Milnor K-群に由来する明示的な生成元を明らかにした([4])。Colliot-Thélène--Kanevsky--Sansuc は代数体上の対角的 3 次曲面の局所大域原理を Brauer-Manin ペアリングを用いて考察し，また，多くの研究者によって，Brauer 群の明示的な生成元を用いた局所体上の対角的 3 次曲面のゼロサイクルの計算が行われている。報告者も先行研究において，係数の変化に応じて，対角的 3 次曲面の生成元が統一的に取れるかどうかという問題を考察した([5])。また，対角的 3 次曲面や 2 次曲面では観察されない，超越的 Brauer 群の対角的 4 次曲面における計算とその Brauer-Manin 障害への応用も近年になってなされている。

また，代数多様体の有理性問題に関連して，Colliot-Thélène–Ojanguren([1]) によって，不分岐コホモロジー群が導入された。Brauer 群は不分岐コホモロジー群としてみれば，2 次の不分岐コホモロジーに対応するものであって，より高次の不分岐コホモロジー群を含めて，解析することができれば，多様体に対して，より精密な情報を得ることができると考えられる。しかし，対角的曲面に対する高次の不分岐コホモロジーの計算は十分には行われていない状況にあった。また， Brauer 群を用いた多様体の数論的研究において，重要な役割を果たした Brauer-Manin ペアリングを，高次の不分岐コホモロジーに対して定式化し，それを用いて新たな，とくに高次元の数論的体上の多様体についての知見を得ることができないか，ということにも報告者は関心を持っていた。

２．研究の目的

（１）対角的な定義式をもつ代数曲面を中心として，Brauer 群や高次の不分岐コホモロジーの定量的な計算や，生成元の明示的な表示を求めることを行う。

（２）Brauer-Manin ペアリングの不分岐コホモロジーに対する一般化を試みること。

（３）（１）や（２）の成果に基づいて，高次元の数論的体上の多様体の有理点の局所大域原理，代数的サイクルの計算などについて，新たな知見を得ること。

３．研究の方法

（１）対角的 3 次曲面の Brauer 群に対する先行研究に倣い，スペクトル系列を用いて，高次のエタールコホモロジーの構造を，Picard 群などの低次のコホモロジーへのガロア群の作用を通して計算し，さらに，エタールコホモロジーと不分岐コホモロジーの間の射の核や余核の構造を調べることで，不分岐コホモロジーの構造を調べる。

また，具体的に関数体のコホモロジーの元を持ってきて，その不分岐性を調べることで，不分岐コホモロジーの元を構成することも行う。

（２）Brauer 群の場合におけるペアリングとの比較を通して，ペアリングの構成が可能かを調べ，その性質を考察する。

（３）（１）における対角的曲面に対する明示的な計算結果に，（２）のペアリングを適用して，局所大域原理の具体的な反例構成や，代数的サイクルに関する具体的な計算結果を与える。

４．研究成果

（１）Brauer 群や不分岐コホモロジーの計算に関して：

① 3 次元アフィン空間内の対角的 2 次曲面に対して，定義方程式にある 3 つの係数をパラメーターとして，対角的 2 次曲面の族を考えた際に，その族の各々の 対角的 2 次曲面の Brauer 群の生成元がどのようにふるまうかということを調べた。

この結果についてより正確に述べるために，「統一的生成元」の概念([5])について，簡単に説明する。いくつかのパラメーターをもつ多様体の族に対して，その族の生成ファイバーの Brauer 群を考えることができる。その生成ファイバーの Brauer 群の元に対し，その多様体の族の各々の多様体の Brauer 群の元を対応させる「特殊化」と呼ばれる操作が定義される。その族の Brauer 群の統一的生成元とは，各々の多様体に特殊化したときに，その各々の多様体の Brauer 群の生成元を与えるような生成ファイバーの Brauer 群の元(の組)のことをい

う。
本研究における主結果は，3つの係数をパラメーターとするアフィン対角的2次曲面の族を考えたときに，上に述べた意味での統一的生成元が存在しない，というものである。有理点が存在する2次曲面に対しては，その有理点を用いて，個々にその Brauer 群の明示的な生成元を与えることが可能であることが知られていた([2])が，そういった操作を統一的に行うことはできないということを示した結果といえる。このような統一的生成元の非存在は，対角的3次曲面に対する先行研究([5])においても見出されていたものであるが，対角的2次曲面のような他の多様体のクラスに対しても観察されるということを見出した点，また，先行研究における証明の記述を，コホモロジーのカップ積を用いることによって，大幅に整理することができたという点においても，重要性をもつものといえる。
この成果については，査読付きの学術論文誌に掲載された(５．〔雑誌論文〕②)。

② 対角的3次曲面の3次不分岐コホモロジーについては，スペクトル系列を詳細に記述し，その構造を調べることを試みたが，3次以上の場合に，エタールコホモロジーをとらえること，また，不分岐コホモロジーとの差になる核や余核の構造を具体的に求めることができなかった。カップ積を用いて，関数体のコホモロジーの元を書き下し，具体的に不分岐な元を構成する方向の研究においては，不分岐な元の例を実際に構成することはできたが，それが非自明な元かどうかが分からず，まとまった成果を得ることはできなかった。
研究の過程で，多様体として曲面に限定せず，3次形式全体についても考察する必要性を感じ，対角的3次曲線の Brauer 群についても研究を行った。そのなかで，対角的3次曲線のうち，すべての係数が1であるような3次フェルマー曲線の Brauer 群について，その 3-ねじれ部分群の生成元を Milnor K-群に由来するシンボルによって，明示的に表すという結果を得ることができた。
ところで，対角的3次曲面のうち，2つの係数パラメーターが1であるようなものについては，その群構造と明示的な生成元が Manin により求められていた([4])。また，このような対角的3次曲面は3次フェルマー曲線を閉部分多様体として含んでいるので，対角的3次曲面の Brauer 群の元を制限することで，3次フェルマー曲線の Brauer 群の元が定まる。今回の結果の帰結として，3次フェルマー曲線の Brauer 群の 3-ねじれ元は，すべてこのクラスの対角的3次曲面の Brauer 群に由来するものであることが観察できた。一般にどのような状況であるかは，今後の研究を俟たねばならないが，次元の異なる対角的な多様体の間の関係性を一つ提示できたと考えている。この研究成果については，より一般の対角的3次曲線の場合についてもさらに研究を進めて，論文としてまとめる予定である。

（２）Brauer-Manin ペアリングの一般化とその応用に関して：
Brauer 群と異なり，関数体の高次のコホモロジーの元は不分岐性から多様体由来の元であることが導かれないため，有理点と不分岐コホモロジーとのペアリングを構成することはできなかった。ゼロサイクルとのペアリングについても議論を深めることができず，それを用いた整数論的な応用も含め，今後の研究における課題として残された。

＜引用文献＞

[1] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l’example d’Artin et Mumford. Invent. Math. 97(1989), no.1, pp.141–158.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, F.Xu, Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms, Compos. Math. 145(2009), No.2, pp.309–363.

[3] Yu. I. Manin, Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne, Actes du Congrès International des Mathématiciens (1970), Tome 1, pp.401–411, 1971.

[4] Yu. I. Manin, Cubic forms: Algebra, geometry, arithmetic, North-Holland Math. Library, 4, 1986.

[5] T. Uematsu, On the Brauer group of diagonal cubic surfaces, Q. J. Math. 65(2014), no.2, pp.677–701.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① 植松　哲也, Brauer groups of some diagonal surfaces, 名城大学理工学部研究報告, 第58号, pp.13--19, 2018年, 査読なし, https://www.meijo-u.ac.jp/academics/sci-tech/report.html

② Tetsuya Uematsu, On the Brauer group of affine diagonal quadrics, Journal of Number Theory, 第163巻, pp.146--158, 2016年，査読あり，DOI：

10.1016/j.jnt.2015.11.015.

〔学会発表〕（計２件）

① 植松　哲也，3 次フェルマー曲線の Brauer 群の 3-ねじれ部分について，日本数学会 2018 年度年会，東京大学，2018 年 3 月.

② 植松　哲也，対角的 3 次曲線の Brauer 群の明示的な表示について，第 14 回数学総合若手研究集会，北海道大学，2018 年 3 月.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等

研究代表者の web ページ，
https://ccmath.meijo-u.ac.jp/~uematsu/ja/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者
植松　哲也（Uematsu Tetsuya）
名城大学・理工学部・助教
研究者番号：60735132

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし

(4)研究協力者
該当なし