

令和元年6月10日現在

機関番号：55401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17527

研究課題名(和文) 退化によるコーエン・マコーレー加群の研究と表現型理論への応用

研究課題名(英文) Study on Cohen-Macaulay modules by degeneration theory and its applications to representation types of algebras

研究代表者

平松 直哉 (Hiramatsu, Naoya)

呉工業高等専門学校・自然科学系分野・准教授

研究者番号：20612039

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、極大コーエン・マコーレー加群の安定圏において安定射集合の次元によって定義される関係が半順序関係になる十分条件を与えた。そしていくつかの超曲面環においてはその半順序関係が退化の安定類似を導くことを示した。基礎環がゴレンシュタイン環のとき、グロタンディック群を定義する関係が概分裂完全列によって生成されるならば基礎環が有限表現型をもつことがわかった。極大コーエン・マコーレー加群の退化について行列表現によって退化を見直し、それにより加算A表現型をもつ超曲面環で次元が1と2の場合に、直既約加群の退化の関係を完全に決定することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

極大コーエン・マコーレー加群の退化に関する成果は、これまで計算が困難であった退化の関係の記述を安定射集合の次元や行列表現の考察に帰着することで容易にし、多くの具体的な例を提供することができる。またグロタンディック群に関する結果はAuslanderの予想の部分的な解決を与えているばかりか、グロタンディック群を定義する関係の様子から有限表現型、また特異点(孤立特異点)の様子を記述することができたので、表現型理論・特異点論の観点からも意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：We give the sufficient condition to make the stable hom relation a partial order. We give the description of stable degenerations of Cohen-Macaulay modules over several hypersurfaces by using the stable hom relation. We show that a Gorenstein ring is of finite representation type if the Auslander-Reiten sequences generate the relations for Grothendieck groups. We also give a necessary condition of degeneration via matrix representations, and completely determine degenerations of indecomposable Cohen-Macaulay modules over hypersurface of countable A representation type of dimension 1 and 2.

研究分野：可換環論

キーワード：コーエン・マコーレー加群 退化 表現型 グロタンディック群 行列表現

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

加群の退化理論は、有限次元多元環上の表現論での幾何学的手法として導入された。これは加群全体に幾何学的構造(モジュライ)を定義し、加群を点と捉え、その近傍を考察する理論である。一般に、加群を直既約なものに限ってもその同型類を全て記述することは不可能である。しかし加群を固定しモジュライがあると想定すると、その近傍での様子は考えることができる。また退化の関係によって加群を分類することが可能な場合もある。故に、退化理論は加群の分類理論において重要である。近年、退化の定義が高次元化されより広いクラスの退化研究が可能になった。

研究代表者は2013年に発表した論文で、極大コーエン・マコーレー(MCM)加群の退化について、偶数次元 A 有限表現型(有限表現型:直既約な MCM 加群の同型類が有限個しかない)超曲面環上の MCM 加群の退化を記述するアルゴリズムを得ることに成功し、その帰結として、すべての退化は加群の拡大による退化の繰り返しで与えられることを示した。また2015年に Journal of commutative algebra で発表した論文では次数付きをもつ MCM 加群の退化について考察し、有限表現型でかつ有向表現であるとき、次数付き MCM 加群の退化はやはりすべて拡大による退化で与えられることを示した。

以上の成果を踏まえると MCM 加群の表現型と退化の振る舞いには何かしらの関係があると考えられる。MCM 加群の表現型について、退化の側面から考察する本課題の着想に至った。

2. 研究の目的

1で述べた背景をふまえ、本研究の目的は、加群の退化理論を MCM 加群に適用し、退化の側面から MCM 加群の圏構造を解析し、退化の様子によって MCM 加群の表現型(有限表現型や、順表現型:表現型のひとつで個数は有限とは限らない)を特徴付けることである。加群の退化を MCM 加群の安定圏で考えることで MCM 加群の退化を記述する新たな不変量の構成、またそれを用いた具体的な退化の関係の計算を行う。三角圏の大きさを測る不変量として導入された三角次元を参考に、退化の関係によって定義する退化次元の導入を試みる。加群に注目するのではなく圏全体で退化の関係を捉えることが目的とし、三角次元との比較を行い、退化次元の上限や下限を探る。

3. 研究の方法

MCM 加群の退化について、これまでに得られている結果を安定圏において見直し、安定圏での退化の様子を記述する方法を構築する。安定圏は加群圏の商圏を取ることで得られ、射の性質について射影加群の違いを無視することができる。それ故、加群圏よりも比較的緩い構造をもっている。特に基礎環がゴレンシュタイン環のとき、MCM 加群の安定圏は三角圏の構造をもつ。MCM 加群の退化の計算は一般には難しい。従って、構造がより柔軟な安定圏で考察することが自然な発想であり、本研究の主な手法とする。基礎環が孤立特異点をもつ場合に Hom 順序を用いて安定退化を記述する方法を模索したり、三角圏の次元の類似である退化次元の評価については有限次元多元環の Tube の概念の手法を検討したりする。以上について、次数付き加群や導来圏の観点から考察し、統一的な議論を検討する。また全ての考察を通して、岡山大学の吉野雄二氏をはじめとする関連する研究者らと十分な交流をもち、支援を仰ぎながら課題をすすめていく。

4. 研究成果

(1)雑誌論文 において MCM 加群の安定圏における退化(安定退化)について考察した。基礎環がゴレンシュタイン局所環で有限表現型をもつとき、安定圏での Hom 集合の次元によって定義される関係(安定 Hom 順序)が半順序関係になるための十分条件を与えた。これは基礎環が有限表現型をもつとき、安定圏での Hom 関手が MCM 加群圏の関手圏において長さ有限となることが鍵であった。これによりいくつかの有限表現型をもつ超曲面環(この十分条件をみたくゴレンシュタイン環は超曲面環になることが従う)の場合には安定 Hom 順序は実際に半順序関係になり、MCM 加群の安定退化の関係によって定まる順序関係と同値な順序を定めることがわかった。高次元の退化理論において具体的に退化の関係を計算することは容易ではない。この考察によって退化の計算は安定 Hom 順序の計算に帰着でき、退化の例をより多く計算できるようになった。このことは今後の研究を推進する上で具体例を検証する際に有益であると考えられる。

(2)グロタンディック群を定義する関係に関する Auslander の予想について考察した(雑誌論文)。基礎環が孤立特異点をもつとき、MCM 加群のなす圏は概分裂完全列(Auslander-Reiten 列)をもつ。環が有限表現型のとき環は孤立特異点になり、従って概分裂完全列をもつ。環が有限表現型であるとき、グロタンディック群を定義する関係は概分裂完全列によって生成されることが古くから知られている。Auslander の予想とは、この逆が成り立つかどうかの命題である。研究代表者は基礎環がゴレンシュタイン環で孤立特異点をもつとき、この予想を肯定的に解決した。さらにはグロタンディック群を定義する関係が概分裂完全列によって生成されるとき、基礎環は孤立特異点をもつことがわかった(雑誌論文)。

(3)基礎環 R がコーエン・マコーレー完備局所環であるとき, Cohen の定理によって正則局所環 T が R の部分環として存在し, R 上の MCM 加群は T 加群として自由加群になる。このとき, MCM 加群の R 加群としての作用を考えることで, 任意の MCM 加群に対して T に成分をもつ行列を得る。これを MCM 加群の行列表現とよぶ。雑誌論文 では退化の関係を加群の行列表現で見直すこと試みた。完備局所環で等標数の場合に, MCM 加群の退化の必要十分条件を与えた。これを用いて可算無限表現型をもつ A 型超曲面環で次元が 1 と 2 のとき, 直既約な MCM 加群の退化の様子を完全に決定することができた。また超曲面環の低次元で得られた結果を高次元化することを目標に, クネーラーの周期性による持ち上げとそれによる退化の関係の振る舞いを考察した。ある特定の超曲面環については MCM 加群の間に退化の関係があるとき, クネーラーの周期性によって持ち上げられた MCM 加群の間には再び退化の関係があることがわかった。この特定の超曲面環には A 型の有限, 加算表現型超曲面環やクネーラーの周期性を 2 回以上適用した超曲面環が含まれる。クネーラーの周期性は安定圏の間の圏同値を与える。一般には安定圏での退化と通常の意味での退化は様相が異なるので, この結果はクネーラーの周期性の直接の帰結ではなく, 実際の退化を記述する精密な結果であることを注意しておく。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8 件)

N.Hiramatsu, R.Takahashi and Y.Yoshino; Degenerations over (A_∞) -singularities and construction of degenerations over commutative rings, Journal of Algebra, 査読有, 525 (2019), 374-389.

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2018.12.031

N.Hiramatsu; On the stable hom relation and stable degenerations of Cohen-Macaulay modules, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, 222 (2018), no.9, 2609-2625.

DOI: 10.1016/j.jpaa.2017.10.010

平松直哉; Degenerations of Cohen-Macaulay modules via matrix representations, Proceedings of the 50th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 査読無, pp 54-59, 2018 年 2 月.

N.Hiramatsu; Relations for Grothendieck groups of Gorenstein rings, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, 145 (2017), no.2, 559-562.

DOI: 10.1090/proc/13255

平松直哉; On the relations for Grothendieck groups of Gorenstein rings, Proceedings of the 49th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 査読無, 28-30, 2017 年 2 月.

平松直哉; On relations for Grothendieck groups of Gorenstein rings, Proceedings of The 38th symposium on commutative Algebra in Japan, 査読無, 112-115, 2017 年 1 月

平松直哉; Stable degenerations of Cohen-Macaulay modules over simple singularities of type (A_n) , 査読無, Proceedings of the 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 33-39, 2016 年 2 月.

平松直哉; On stable degenerations of Cohen-Macaulay modules over simple singularities of type (A_n) , 査読無, Proceedings of The 37th symposium on commutative Algebra in Japan, 137-143, 2016 年 1 月.

[学会発表](計 10 件)

N.Hiramatsu; Degenerations of Cohen-Macaulay modules via matrix representations, The Workshop and 18th International Conference on Representations of Algebras, Czech Technical University in Prague, 2018 年.

N.Hiramatsu; Degenerations of Cohen-Macaulay modules, KU Algebra Seminar, The University of Kansas, 2017 年.

平松直哉; On degenerations of Cohen-Macaulay modules via matrix representations, 第 39 回可換環論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 2017 年.

平松直哉; Degenerations of Cohen-Macaulay modules via matrix representations, 第 50 回環論および表現論シンポジウム, 山梨大学大学, 2017 年.

N.Hiramatsu; On relations for Grothendieck groups of Gorenstein rings, 第 38 回可換環論シンポジウム(The 9th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra と合同開催), IPC 生産性国際交流センター, 2016 年.

平松直哉; Relations for Grothendieck groups of Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings, 第 49 回環論および表現論シンポジウム, 大阪市立大学, 2016 年.

N.Hiramatsu; Relations for Grothendieck groups of Gorenstein rings, ICRA 2016 (XVth International Conference on Representations of Algebras and Workshop), Syracuse University, 2016 年.

平松直哉; On the contravariantly determinedness of a stable category of Cohen-Macaulay modules. Ring Theory and Representation Theory Seminar in 2015, 名古屋大学, 2015 年.

平松直哉; Stable degenerations of Cohen-Macaulay modules over simple singularities of type (An), 第 37 回可換環論シンポジウム, 倉敷シーサイドホテル, 2015 年.

平松直哉; Stable degenerations of Cohen-Macaulay modules over simple singularities of type (An), 第 48 回環論および表現論シンポジウム, 名古屋大学, 2015 年.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://www.kure-nct.ac.jp/department/g/original/hiramatsu/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号 (8 桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。