

令和元年6月24日現在

機関番号：22604

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17528

研究課題名(和文) 相対双曲群の範疇を超えた負曲率性を持つ群の粗幾何学構造の研究

研究課題名(英文) coarse geometry of negatively curved spaces beyond relatively hyperbolic groups

研究代表者

深谷 友宏 (Fukaya, Tomohiro)

首都大学東京・理学研究科・准教授

研究者番号：40583456

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：尾國新一氏(愛媛大学)との共同研究により、非正の断面曲率を持つリーマン多様体の粗幾何学に於ける対応物とみなせる、粗凸空間という新しい距離空間のクラスを導入した。この空間のクラスは空間の粗い同一視(擬等長同型)の元で閉じており、さらに空間の直積でも閉じているという著しい性質を持つ。

私達はこの粗凸空間に対して境界とその上の距離を構成した。これを用いて、Cartan-Hadamardの定理の粗幾何学に於ける類似が成立することを示した。その系として粗凸空間に対して粗Baum-Connes予想が肯定的に成立することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

粗Baum-Connes予想は非可換幾何学及び距離空間の粗幾何学に於ける中心的な問題である。私達は粗凸空間という、非正曲率を持つ距離空間の新しい定式化を導入し、その空間に対して粗Baum-Connes予想が成り立つことを示した。近年、粗凸空間に幾何学的な作用を持つ様々な群が発見されている。私達の結果から、こうした群に対して粗Baum-Connes予想が成立することが従う。

研究成果の概要(英文)：We introduced a new class of metric spaces, called "coarsely convex spaces", which is a generalization of Riemannian manifolds of nonpositive sectional curvatures. This class is closed under both quasi-isometry and direct products. We constructed boundaries of the coarsely convex spaces and we established a coarse version of the Cartan-Hadamard theorem. Using this, we proved that the coarsely convex spaces satisfy the coarse Baum-Connes conjecture.

研究分野：幾何学

キーワード：粗幾何学 coarse geometry coarse Baum-Connes予想

1 研究開始当初の背景

近年、多様体の範疇を超えた空間の幾何学が活発に研究されている。その一つである**粗幾何学 (coarse geometry)** は、空間を遠くから眺めたときに見えて来る、粗い構造に着目した研究である。例えば整数 \mathbb{Z} と実数 \mathbb{R} は局所的には全く異なる構造を持つが、両者を遠くから眺めてみれば、どちらも直線という同じ幾何構造が見えて来る。このような幾何学を考える動機として、**幾何学的群論**と**非可換幾何学**がある。

無限離散群については 20 世紀初頭にロシア学派による組合せ論の手法を用いた研究が行われたが、20 世紀後半にグロモフにより幾何学的な手法を全面に押し出した幾何学的群論が提唱され、それ以来非常に活発に研究が進められている。特にグロモフは負の断面曲率を持つリーマン多様体の概念を、一般の距離空間に拡張して、そこに作用する群として双曲群の理論を創始した。

非可換幾何学とはコンヌによって 1980 年代に提唱された、幾何学に由来する非可換な代数の研究とその幾何学への応用である。この分野の主要な問題の一つに、距離空間 X から構成される非可換な代数である C^* 環 $C^*(X)$ の研究がある。この $C^*(X)$ の複雑さを図る指標である K 群 $K_*(C^*(X))$ を X の位相幾何学的な情報で計算できるという予想が、**粗バウム・コンヌ予想**である。距離空間 X がグロモフの意味で負曲率を持つときは、 X に対する粗バウム・コンヌ予想が肯定的に成立することが知られている。また尾國新一氏との共同研究により、相対双曲群に対し、その放物部分群が粗バウム・コンヌ予想を満たし、その分類空間を有限次元の単体複体で実現できるならば、その相対双曲群自身も粗バウム・コンヌ予想を満たすことを示した。

2 研究の目的

本研究の目的は、上述の相対双曲群に対する粗バウム・コンヌ予想の研究を、相対双曲群の範疇を超えた非正曲率を持つ群や空間に対しても行うことである。

3 研究の方法

20 世紀後半以降、非正の断面曲率を持つリーマン多様体の様々な幾何学的な性質が研究されている。こうした幾何学的な性質を抽象化し、そのような性質を持つ距離空間を、「非正曲率を持つ」距離空間見なし、その粗幾何学的な性質を調べる。

4 研究成果

上述の通り、負の断面曲率を持つリーマン多様体の概念は、グロモフによって距離空間に対する概念として拡張された。一方で非正の断面曲率を持つ距離空間の概念として、様々な距離空間のクラスが導入されてきたが、いずれも空間の粗い同一視の元で不変ではない、という意味で、粗幾何学に於ける非正曲率空間の定式化として決定的なものではなかった。

私は尾國新一氏 (愛媛大学) との共同研究により、2017 年に**粗凸空間 (coarsely convex space)** という距離空間のクラスを導入した。これは非正の断面曲率を持つリーマン多様体の性質を一般化したものであり、しかも空間の粗い同一視の元で不変であるという著しい性質を持つ。私達はこの粗凸空間 X に対して境界とその上の距離を構成した。これを用いて、 X に対して Cartan-Hadamard の定理の粗幾何学に於ける類似が成立することを示した。その系として X に対して粗バウム・コンヌ予想が肯定的に成立することを示した [1]。

粗凸空間と、その他の非正曲率空間の関係を図 1 にまとめておく。

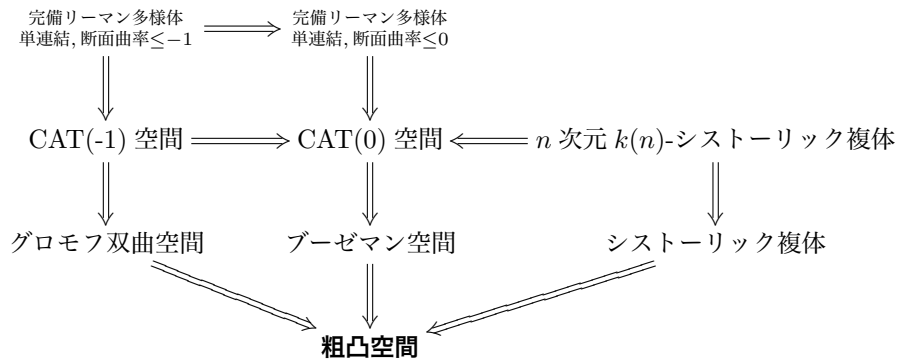


図1 粗凸空間と他の距離空間のクラスの関係

5 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4 本)

- [1] *A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture*, [T. Fukaya](#) and S. Oguni, to appear in *J. Topol. Anal.*, DOI:10.1142/S1793525319500675
- [2] *The coarse Baum-Connes conjecture for Busemann nonpositively curved spaces*, [T. Fukaya](#) and S. Oguni, *Kyoto J. Math.* **56** (2016), no. 1, 1–12. DOI:10.1215/21562261-3445129
- [3] *Coronae of relatively hyperbolic groups and coarse cohomologies*, [T. Fukaya](#) and S. Oguni, *J. Topol. Anal.* **8** (2016), no. 3, 431–474. DOI:10.1142/S1793525316500151
- [4] *Coronae of product spaces and the coarse Baum-Connes conjecture*, [T. Fukaya](#) and S. Oguni, *Adv. Math.* **279** (2015), 201–233. DOI:10.1016/j.aim.2015.01.022

[学会発表] (計 11 件)

1. “Coarsely convex spaces”, AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, Special Session on Coarse Geometry, Index Theory, and Operator Algebras: Around the Mathematics of John Roe March 24, 2019
2. “Coarsely convex spaces”, Rigidity School - The Final Meeting, 名古屋大学, 2018 年 9 月 17 日
3. “A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture”, Workshop: Non-Positively Curved Groups and Spaces, Universität Regensburg, September 19, 2017
4. “A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture”, Noncommutative Geometry and K-Theory at Rits -The Fourth China-Japan Conference- 立命館大学, March 28, 2018
5. “The coarse Baum-conjecture for product of nonpositive curved spaces and groups”, Workshop on Development of new methods in Symplectic Geometry: JSPS Bilateral Joint Research Project between Belgium and Japan, 東北大学, 2016 年 4 月 26 日
6. “The coarse Baum-conjecture for product of nonpositive curved spaces and groups”, Glances@Manifolds II, Jagiellonian University, August 8-13, 2016, Kraków, Poland
7. “Boundary of relatively hyperbolic groups and coarse geometry”, 日中非可換幾何学研究集会, 重慶大

学, 2015 年 12 月 21 日

8. “相对双曲群の境界と粗幾何学”, 日本数学会秋季総合分科会特別講演, 京都産業大学, 2015 年 9 月 16 日
9. “Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups”, Séminaire Caen Cergy Clermont Paris, Institut de Mathématiques, Université Paris 7, December 13, 2013
10. “Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups”, ESI School and Conference Geometry and Quantization GEOQUANT 2013, Erwin-Schrödinger International Institute for Mathematical Physics (ESI), Vienna, Austria, August 27, 2013
11. “The coarse (co) Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups”, Séminaire d’algèbres d’opérateurs, Université Paris 7, April 18, 2013.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権] (計 0 件)

[その他]

web ページ <http://www.comp.tmu.ac.jp/tomohirofukaya>