

令和 2 年 5 月 14 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K17533

研究課題名(和文)非ケーラー複素多様体の非可換Hodge分解

研究課題名(英文)Non-abelian Hodge decomposition on non-Kähler complex manifolds

研究代表者

糟谷 久矢(Kasuya, Hisashi)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80712611

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文):ケーラー多様体上で非可換ホッジ分解と呼ばれる平坦束とHiggs束との対応が知られているが、非ケーラー多様体上ではまだ非可換ホッジ分解は理解されていない。本研究ではホッジ理論の一般化であるツイスター構造の理論やBott-Chernコホモロジーの理論などを用いて非ケーラー多様体上の非可換ホッジ分解の理論の構築を行った。この研究の重要な応用として、非ケーラー多様体の重要なクラスの一つである佐々木多様体上で非可換ホッジ分解が成立することが証明できた。より具体的には、コンパクト佐々木多様体上では、半単純平坦束と多重安定ベーシックHiggs束が対応が成り立つことが示された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ケーラー多様体上で非可換ホッジ分解は多様体の分類(Moduli)に関する理論や基本群の表現に関する理論など多様な応用がある。しかしケーラーという仮定は幾何学においては非常に限定的であり、これらの理論が非ケーラー多様体に拡張できることが望まれている。

ケーラー多様体は偶数次元の空間しか扱えないが、佐々木多様体で非可換ホッジ分解が得られたことにより奇数次元上でも理論が展開できるようになり、現実の物理理論とリンクするような幾何学理論が構築されることが期待される。

研究成果の概要(英文): It is known that on compact Kähler manifolds, there is a correspondence between flat vector bundles and Higgs bundles so called non-abelian Hodge decomposition. But the non-abelian Hodge decomposition on non-Kähler manifolds is not known. In this research, I was constructing the theory of non-abelian Hodge decomposition on non-Kähler manifolds by using Twistor structure theory (a generalization of Hodge theory) and Bott-Chern cohomology theory. An important application of this research is to prove that the non-abelian Hodge decomposition exists on compact Sasakian manifolds (an important class of non-Kähler manifold). More precisely, I proved that on compact Sasakian manifolds there exists a correspondence between semi-simple flat vector bundles and poly-stable basic Higgs bundles.

研究分野：幾何学

キーワード：平坦束 Higgs束 非可換ホッジ理論

1. 研究開始当初の背景

コンパクトケーラー多様体上では通常のホッジ分解の非可換な拡張として、半単純平坦ベクトル束と多重安定 Higgs 束とが対応するという非可換 Hodge 分解の成立が知られている。この非可換 Hodge 分解はケーラー構造に関連する調和計量によってなされているので、その構成はケーラー構造に依存するものである。一般のケーラー多様体ではない複素多様体上では非可換 Hodge 分解が成立しないどころか何を非可換ホッジ分解と呼ぶべきかは明らかではない。

2. 研究の目的

本研究の目的は、ケーラー構造を持つとは限らない複素多様体上で非可換ホッジ分解の研究を行うことである。まず、非可換ホッジ分解を純粋な複素幾何学的性質によって、特徴づける。そして、その性質が変形理論や双有理写像で安定な性質かどうかを調べる。また、種々の具体的な非ケーラー複素多様体で非可換ホッジ分解が成立するかどうかを調べる。

3. 研究の方法

まず一般の複素多様体上で非可換ホッジ分解を研究するための枠組みから構築をおこなった通常のホッジ分解の場合、デルデルバーレンマと呼ばれる微分作用素に関するある種の関係式が成り立つという純粋な複素幾何学的性質によって、その存在を特徴づけることが出来る。これによって、特別な計量の存在を調べることなく複素多様体上でホッジ分解の研究を行うことが出来るようになる。さらに、複素多様体のホッジ分解はポットチャーノコホモロジーと呼ばれるコンパクト複素多様体に対して定義されるある有限次元コホモロジーを用いて定量的に研究することが出来る。そこで非可換ホッジ分解が複素多様体上で起こるということを計量などの構造を付加しない純粋な複素幾何学的な性質として特徴づけ、さらにその非可換ホッジ分解の成立条件を複素多様体の計算可能な不変量を用いた関係式によって表現する。

4. 研究成果

(1) Mixed Hodge 構造とその変動に関する結果

John W. Morgan の仕事によって、Kähler 多様体の基本群の Malcev completion には mixed Hodge 構造が入る事が知られているが、その構造は unique でもなくまた Morgan の構成では canonical なものが取れている訳ではない。近年の研究においては、この構造をより natural なものとして定める方法として元の多様体の based point を固定するという手段を用いるが、このやり方では得られた構造は based point の取り方に大きく依存してしまう。これは、多様体自身をパラメーターとするような不変量を構成しているという点で非常に効率が悪いように感じられる。私は本研究において、コンパクトケーラー多様体上で based point を固定する事なしに基本群の Malcev completion 上に canonical な mixed Hodge 構造を構成した。この構造はケーラー計量の Green 作用素を用いた Sullivan 1-minimal model を用いて構成される。この構造は多様体のケーラー計量に依存する。この構造は上記の based point を固定した時の構造よりも代数的に control しやすいものである。また、この構造を用いて variation of mixed Hodge 構造を explicit に構成する事が出来る。これは Hain-Zucker や Eyssidoux-Simpson らの構成に非常に良く似ていながらも、全く新しい構成となっている。この結果によって、複素多様体上の variation of mixed Hodge 構造全体の空間に関する幾何学的理論という代数幾何学や複素解析幾何学と計量的微分幾何学の新たな融合の可能性が見出された。

(2) 非可換 Mixed Hodge 構造の微分代数モデル

ホッジ理論が展開できるような空間の代数的なモデルを混合ホッジ図式と呼ぶ。混合ホッジ図式から定まる functorial な Tannaka 圏の構造を考察することによって混合ホッジ構造の変動の differential graded algebra モデルを構築した。具体的には混合ホッジ図式を複素多様体のドラムモード differential graded algebra に見立てて、複素多様体上の variation of mixed Hodge 構造的なオブジェクトがなすようなテンソルカテゴリーを考える。混合ホッジ図式の Sullivan 1-minimal model 上の mixed Hodge 構造をとることで、その mixed Hodge 表現から variation

of mixed Hodge 構造的なオブジェクトを構成することにより Tannaka 圏的構造(非可換 Mixed Hodge 構造)に関する同値が得られた。

混合ホッジ図式という完全に代数的なモデル上での構成のためコンパクトケーラー多様体でなく幅広い空間で非可換 Mixed Hodge 構造を表現することができるようになった。これにより種々の空間での非可換ホッジ分解に関する不変量の構成などが可能になることが期待される。

(3) 佐々木多様体の非可換ホッジ分解

実際にどのような非ケーラー多様体で非可換ホッジ分解がおこるかを明らかにした。非ケーラー多様体の重要なクラスである佐々木多様体の非可換ホッジ分解について研究を行った。コンパクト佐々木多様体上では半単純な平坦束とベーシックなヒッグス束の間に 1 対 1 の対応があることがわかり、コンパクト佐々木多様体は非可換ホッジ分解がおこることがわかった。より詳しくは次のことを示した。コンパクト佐々木多様体上の半単純な平坦束の調和計量を考えると、佐々木構造から Reeb 葉層構造上に標準的に定まる横断的ケーラー構造に関してベーシックな多重調和計量となることをしめした。これにより、半単純な平坦束を横断的ケーラー構造に関するベーシックなヒッグス束に対応させることができる。また、ベーシックなヒッグス束上でベーシックなチャーンクラスについての安定性条件を考えることで、エルミート-インシュタイン計量が構成できる。これにより、ベーシックなヒッグス束を半単純な平坦束に対応させることができる。この二つの対応によりコンパクト佐々木多様体は非可換ホッジ分解がおこることがわかった。

この結果を応用することによって、佐々木多様体のベクトル束に関する Bogomolov-Gieseker 型の不等式や、佐々木多様体をパラメーターとする Variation of Hodge structure の理論あるいはコンパクト佐々木多様体の基本群に関する構造理論など多様な結果が得られた。また、非可換ホッジ分解のリーマン面のモジュライ空間への応用のアナロジーを考えることによって、佐々木多様体の非可換ホッジ分解による 3 次元多様体の分類理論の可能性が見出された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Hisashi Kasuya | 4. 巻 28 |
| 2. 論文標題 Techniques of Constructions of Variations of Mixed Hodge Structures | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Geometric and Functional Analysis | 6. 最初と最後の頁 393-442 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00039-018-0441-3 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|---------------------|
| 1. 著者名 Hiroaki Ishida Hisashi Kasuya | 4. 巻 198 |
| 2. 論文標題 Transverse Kahler structures on central foliations of complex manifolds | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata | 6. 最初と最後の頁 61-81 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s10231-018-0762-8 | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|--------------------------|
| 1. 著者名 Hisashi Kasuya | 4. 巻 67 |
| 2. 論文標題 Mixed Hodge structures and Sullivan's minimal models of Sasakian manifolds. | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Ann. Inst. Fourier (Grenoble) | 6. 最初と最後の頁 2533--2546 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------------|
| 1. 著者名 Daniele Angella, Hisashi Kasuya | 4. 巻 52 |
| 2. 論文標題 Bott-Chern cohomology of solvmanifolds | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Ann. Global Anal. Geom. | 6. 最初と最後の頁 363--411 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s10455-017-9560-6 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------------|
| 1. 著者名 Hisashi Kasuya | 4. 巻 28 |
| 2. 論文標題 Techniques of constructions of variations of mixed Hodge structures | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Geom. Funct. Anal. | 6. 最初と最後の頁 393--442 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00039-018-0441-3 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|------------------------|
| 1. 著者名 糟谷久矢 | 4. 巻 51 |
| 2. 論文標題 Generalized deformations and holomorphic poisson cohomology of solvmanifolds. | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Ann. Global Anal. Geom. | 6. 最初と最後の頁 155, 177 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10455-016-9529-x | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------|
| 1. 著者名 D. Angella, 糟谷久矢 | 4. 巻 未定 |
| 2. 論文標題 Symplectic Bott-Chern cohomology of solvmanifolds. | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 J. Symplectic Geom. | 6. 最初と最後の頁 未定 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|--------------------------|
| 1. 著者名 糟谷久矢 | 4. 巻 369 |
| 2. 論文標題 Central theorems for cohomologies of certain solvable groups. | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc. | 6. 最初と最後の頁 2879, 2896 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/tran/6837 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 糟谷久矢 | 4. 巻 19 |
| 2. 論文標題 Flat bundles and Hyper-Hodge decomposition on solvmanifolds | 5. 発行年 2015年 |
| 3. 雑誌名 Int. Math. Res. Not. IMRN | 6. 最初と最後の頁 9638&9659 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/ imrn/rnu244 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 糟谷久矢 | 4. 巻 8 |
| 2. 論文標題 Singularity of the varieties of representations of lattices in solvable Lie groups. | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 J. Topology Analysis | 6. 最初と最後の頁 273&285 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793525316500114 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------|
| 1. 著者名 糟谷久矢 | 4. 巻 未定 |
| 2. 論文標題 Central theorems for cohomologies of certain solvable groups | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 Transactions of the AMS | 6. 最初と最後の頁 未定 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------|
| 1. 著者名 糟谷久矢 | 4. 巻 未定 |
| 2. 論文標題 Cohomologies of Sasakian groups and Sasakian solvmanifolds | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata | 6. 最初と最後の頁 未定 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------|
| 1. 著者名 Anna Fino, 糟谷久矢 | 4. 巻 未定 |
| 2. 論文標題 Tamed symplectic structures on compact solvmanifolds of completely solvable type | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa | 6. 最初と最後の頁 未定 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 6件)

| |
|--|
| 1. 発表者名 糟谷久矢 |
| 2. 発表標題 Techniques of constructions of variations of mixed Hodge structures |
| 3. 学会等名 The 5th workshop "Complex Geometry and Lie Groups" (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 糟谷久矢 |
| 2. 発表標題 Techniques of constructions of variations of mixed Hodge structures and points |
| 3. 学会等名 第65幾何学シンポジウム (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 糟谷久矢 |
| 2. 発表標題 DGA-Models of Variations of Mixed Hodge Structures |
| 3. 学会等名 Workshop on Global Aspects of Projective and Kahler Geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hisashi Kasuya |
| 2. 発表標題 Techniques of constructions of variations of mixed Hodge structures |
| 3. 学会等名 "ANALYTIC AND ALGEBRAIC GEOMETRY", ICTS, Bangalore India (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hisashi Kasuya |
| 2. 発表標題 Techniques of constructions of variations of mixed Hodge structures |
| 3. 学会等名 "Complex analytic geometry" Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India. (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 糟谷久矢 |
| 2. 発表標題 Extensions of Nomizu's Theorem |
| 3. 学会等名 Braids, Configuration Spaces and Quantum Topology (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2015年 |

| |
|----------------------------------|
| 1. 発表者名 糟谷久矢 |
| 2. 発表標題 可解多様体のコホモロジー(実演) |
| 3. 学会等名 広島幾何学研究集会 2015 (招待講演) |
| 4. 発表年 2015年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 糟谷久矢 |
| 2. 発表標題 Extensions of Nomizu's Theorem |
| 3. 学会等名 The 4th Workshop "Complex Geometry and Lie Groups" (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2016年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|