

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 5 月 15 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2016

課題番号：15K17535

研究課題名(和文) 圏を用いた空間の再構成・ホモトピー論の研究

研究課題名(英文) Research on homotopy theory and reconstruction of spaces using categories

研究代表者

田中 康平 (TANAKA, Kohei)

信州大学・学術研究院社会科学系・助教

研究者番号：70708362

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では点と矢印からなる「圏」を基盤とした組合せホモトピー論の構築、およびその応用を模索した。分割された空間に一方方向に向かう流れを与えたとき、その流れの留まる地点から圏を構築し、元の空間の情報を復元することに成功した。また、順序集合を分類する道具として、離散的な不変量を導入した。

これらの理論の応用として、センサーネットワークによるターゲットの数え上げ問題を考えた。組合せ論的オイラー標数を用いた積分により、ネットワークグラフ上に散らばるターゲットの総数を求められる事を示した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we established the combinatorial homotopy theory and its application based on categories, which consists of points and arrows. Given an acyclic flow on a cell complex, we obtained a category from the critical cells and reconstructed the information of the original space. On the other hand, we introduced a discrete invariant of partially ordered sets as a tool to classify them.

As an application of these theory, we considered the counting problem for targets lying on a sensor network. By using the integration with respect to combinatorial Euler characteristic, we showed that we can compute the number of targets lying on the network graph.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：圏 ホモトピー論 センサーネットワーク オイラー積分 LS カテゴリー

### 1. 研究開始当初の背景

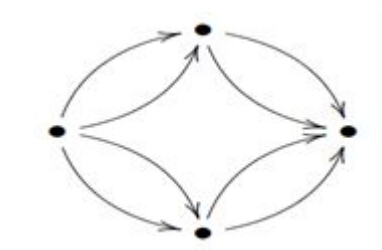
位相幾何学におけるホモトピー論は従来、空間の連続的な変形に焦点を当ててきた。近年になり、空間を代数的な対象で置き換え、組合せ論を用いた空間の解析が盛んに行われてきている。よく知られた関係では、三角形分割が与えられた単体複体と呼ばれる空間と、半順序集合がホモトピー論の意味でもうまく対応している [BM12]。連続的な変形を離散的・帰納的な操作に置き換えることで、代数的なアプローチが可能となり、他分野との繋がりも拡大している。

一方で、空間における様々な不変量も組合せ論的な視点から導入が進んでいる。例えばオイラー標数は従来、ホモロジー群のランクの交代和として与えられていたが、Leinster は圏のオイラー標数がその射の本数からなる行列の言葉で記述された [Lei08]。また素朴な不変量である LS カテゴリーも、単体複体に対し、その組合せ的情報を色濃く反映した単体的 LS カテゴリーが考案された [FMV15]。

### 2. 研究の目的

本研究は半順序集合の一般化である「圏」を用いた組合せ的ホモトピー論の発展と応用を目的としている。圏は点と矢印から構成され、半順序集合は順序関係に対して唯一の矢印を対応させることで圏とみなせる。

一般の圏の場合、複数の矢印を持つことが許され、半順序集合よりも幅広い操作が可能であり、対応する空間も単体複体より一般的な空間を扱える。



【2 次のトーラスを表す圏】

この圏における組合せ的ホモトピー論を構築し、発展させ、空間における従来のホモトピー論との対応を模索することを主眼に置いている。

空間の情報を圏の言葉で記述し、元の空間を再構成する手法の開発は、連続性と離散性を行き来できるという意味でも重要である。またこのことにより、空間で考えられてきた様々な位相 (ホモトピー) 不変量を、圏における不変量と関係づけることができる。組合せ的に定式化される圏の不変量を計算することで、連続的な位相空間の不変量にアプローチすることが可能となる。また、その計算の簡略化のためには、ホモトピー論的手法の開発が欠かせない。位相空間では、空間の被覆に関する包除原理や、ファイブレーションに関する積公式などを満たす不変量が存在する。圏における組合せ的ホモトピーの構築

は、それら不変量の計算にも有用であると期待できる。

### 3. 研究の方法

具体的には以下の3つの事柄について考察したので、それぞれの研究方法を述べる。

#### (1) 圏による空間の再構成

滑らかなモース関数は空間上に流れを与え、その流れの留まる点 (臨界点) を調べることにより、空間の概形を把握する手法が知られている。臨界点とそれらをつなぐ流路から圏を構成し、元の空間の情報を再構成しようという試みもある [CJS]。本研究では、その離散的な枠組みとして、離散モース関数から圏を構成し、元の空間のホモトピー型を復元することを目指す。圏論的にホモトピー型が一致していることを示すためには、圏の間の関手を考え、そのホモトピーファイバーを考察するのが筋である。Quillen の定理により、すべてのホモトピーファイバーが1点に押し潰せたならば、圏として同じホモトピー型を持つことが示せる。

#### (2) ホモトピー不変量の圏論的計算

空間を分類する上で、様々な位相不変量、ホモトピー不変量が知られている。数値として表されるものとして、オイラー標数以外にも、例えば、ベッチ数、LS カテゴリー、位相的複雑さ、などが挙げられる。圏を用いた組合せ的な視点からこれらの不変量を考え、古典的なものと対比することを目指す。まずは、扱いやすい半順序集合に対し定式化を与え、その後一般の圏に概念を拡張することを目指す。

#### (3) 圏におけるホモトピー論的道具の導入

上記の不変量の計算において、ホモトピー論的手法が有効な場合がある。例えば、包除原理や積公式などは計算を容易にしてくれる。圏の枠組みの中でも、組合せ的ホモトピー論を展開し、不変量の計算や、位相空間の場合との対比を行いたい。

特に着目すべき性質としては、圏の被覆によるチェック理論、そして圏のファイブレーションである。チェック理論は被覆の1つ1つの情報から、全体の情報を読み取るもので、オイラー標数の包除原理につながることを期待できる。圏のファイブレーションとしては、様々な候補が考えられるが、LS カテゴリーに対し積公式を導くことを示したい。

### 4. 研究成果

上記の3つの事柄について、それぞれ得られた結果を説明する。

#### (1) 圏による空間の再構成

離散モース関数に対し、臨界点 (胞体) と流路から圏を構成し、その圏の幾何学的実現が元の空間と同じホモトピー型を持つことを

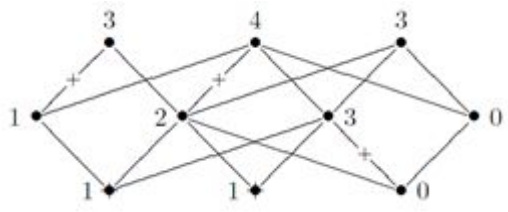
示した。この圏は、流路の間にも順序構造を持つ、いわゆる高次の圏になっており、それらの情報を用いて再構成が可能となった。証明には高次の圏における Quillen の定理が用いられ、滑らかなモース理論を軸とした先行研究[CJS]とは異なった手法により示すことができた。得られた結果は論文にまとめ、学術雑誌に投稿中である[NTT]。

### (2) ホモトピー不変量の圏論的計算

半順序集合の LS カテゴリーについて、組合せ的な定式化を与えた。また、単体複体にも同様の定式化を与え、これらがうまく対応していることを示した。さらには古典的な空間の LS カテゴリーとの間の評価式を与えた。LS カテゴリーはモース関数の臨界点の個数の上界になっているが、離散モース関数の場合でも、同様の不等式が成り立つことを示した。

### (3) 圏におけるホモトピー論的道具の導入

位相空間では局所的な情報をつなぎ合わせてグローバルな情報を得るチェック理論が知られているが、それを圏に対しても適用することに成功した。ここから得られた結果として、圏のオイラー標数の包除原理がある。この性質に着目し、圏のオイラー標数を測度として捉えた積分理論（離散的オイラー積分）を構築した。元々、Baryshnikov と Ghrist により、位相的なオイラー積分が導入され、センサーフィールド上のターゲットの数え上げの理論に用いられてきた [BG09]。本研究では、離散的オイラー積分の実用的な応用として、センサーネットワークにおけるカウント問題にアプローチした。ネットワークグラフ上に散らばるターゲットの総数が、センサーから得られるカウント関数のオイラー積分と一致していることを示した。



【5つのターゲットによるカウント関数】

また、より実用的な視点から、センサーネットワークによる数え上げ理論の効率化、最適化及び信頼性についても、ホモトピー論的な視点から考察した。これは、仮にセンサーが故障してターゲットを捉え損ねた場合でも、オイラー積分によってターゲットの総数を得られるかどうかに関及したものである。本研究では、ネットワークグラフ上でオイラー標数を変化させずに除去可能な頂点を定式化し、これがオイラー積分の値に影響を与えないことを示した。これにより、本質的にセンサーを配置すべき地点が明確化され、セン

サーネットワークのコスト管理にも有用な結果となった。

### < 引用文献 >

[BG09] Y. Baryshnikov; R. Ghrist. Target enumeration via Euler characteristic integrals. SIAM J. Appl. Math. 70 (2009), no. 3, 825-844.

[BM12] J. A. Barmak; E. G. Minian. Strong homotopy types, nerves and collapses. Discrete Comput. Geom. 47 (2012), no. 2, 301-328.

[CJS] R. L. Cohen, J.D.S. Jones, and G. B. Segal. Morse theory and classifying spaces, <http://math.stanford.edu/~ralph/morse.ps> . preprint.

[FMV15] D. Fernández-Tertero; E. Macías-Virgós; J. A. Vilches. Lusternik --Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces. Topology Appl. 194 (2015), 37-50.

[Lei08] T. Leinster. The Euler characteristic of a category. Doc. Math., 13: 21-49, 2008

[NTT] V. Nanda, D. Tamaki, and K. Tanaka. Discrete Morse theory and classifying spaces. Preprint. arXiv:1612.08429v1.

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計4件)

Kohei Tanaka, Čech complexes for covers of small categories, Homology, Homotopy and Applications (査読有), vol. 19(1), pp.281-291(2017).DOI:<http://dx.doi.org/10.4310/HHA.2017.v19.n1.a14>

Kohei Tanaka, Minimal networks for sensor counting problem using discrete Euler calculus, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. (査読有) 34(1): 229-242 (2017). DOI: 10.1007/s13160-017-0243-2.

Kohei Tanaka, Discrete Euler integration over functions on finite categories, Topology and its Applications (査読有) 204 : 185-197 (2016). DOI: 10.1016/j.topol.2016.03.012.

Kohei Tanaka, Lusternik -- Schnirelmann category for cell complexes and posets, Illinois Journal of

Mathematics, (査読有) Vol. 59 (No.3):  
623-636 (2016).

〔学会発表〕(計5件)

田中 康平, オイラー標数とその応用,  
代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会(信州  
大学), 2016年8月

田中 康平, 有限位相空間の組み合わせ  
論的複雑さ, 信州トポロジーセミナー(信州  
大学), 2016年7月

田中 康平, Discrete Euler integration  
and sensor networks, 代数, 論理, 幾何と  
情報科学研究集会(鳥取環境大学), 2015年  
9月

田中 康平, 離散的オイラー積分とネッ  
トワーク理論, グレブナー 若手集会(静岡  
大学), 2015年7月

田中 康平, 組合せ論的オイラー積分と  
その応用, 経済研究所 ワークショップ,  
経済学および諸科学における数量的方法の  
検討(青山学院大学), 2015年6月

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田中 康平 (TANAKA, Kohei)  
信州大学・学術研究院社会科学系・助教  
研究者番号: 70708362

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

### (4) 研究協力者

玉木 大 (TAMAKI, Dai)  
信州大学・学術研究院理学系・教授  
研究者番号: 10252058

NANDA, Vidit  
The University of Oxford