

令和元年5月16日現在

機関番号：22604

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17536

研究課題名(和文) 測度距離空間の幾何解析-最適輸送理論と情報幾何の融合と応用-

研究課題名(英文) Application of Optimal Transport and Information geometry to Metric Measure Spaces

研究代表者

高津 飛鳥 (TAKATSU, Asuka)

首都大学東京・理学研究科・准教授

研究者番号：90623554

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：申請者はWasserstein幾何と情報幾何において、熱流の大域挙動が鍵となることを鑑みて、大域挙動の観点を用いた両幾何の融合を目指した。そして申請者は東京大学の石毛和弘氏とフィレンツェ大学のPaolo Salani氏との共著にて、ユークリッド空間の熱流が保つ最も強い凹性が対数凹性ではないことを証明し、熱流で保たれる最強の凹性が何であるかを決定した。この最強の凹性はその出自により、情報幾何の指数分布族に関する理論とWasserstein幾何における相対エントロピーの凸性の概念を同時に一般化することが大いに期待できる。このように本研究では最適輸送理論と情報幾何の融合に貢献することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

H.J. BrascampとE.H. Liebが1976年に打ち出した不等式以降、対数凹性は熱流に最適とされ、熱流の漸近解析や形状解析などの大域解析の軸になっていた。よって上記で述べた熱流で保たれる最強の凹性が対数凹性ではないという事実、および熱流で保たれる最強の凹性を決定した事実は、熱流の大域解析に新機軸を与える。特に熱流におけるこの最強の凹性の保存則を導くエントロピーの凸性、およびそのエントロピーの凸性から得られる幾何学的条件を明らかにすることは、熱流の大域挙動に関わる幾何学、曲率の条件をかした幾何解析に新展開を持ち込むことが期待できる。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is to combine Wasserstein geometry with Information geometry and application of the both geometry to geometric analysis by taking account of the fact that the asymptotic behavior of the heat equation plays an important role in geometric analysis. In the joint work with Kazuhiro Ishige (the university of Tokyo) and Paolo Salani (university of Florence), we proved that the logarithmic concavity is not the strongest concavity preserved by the heat equation. Moreover we clarified what is the strongest concavity preserved by the heat equation. From the nature of the strongest concavity, it is expected to generalize the theory of Wasserstein geometry and Information geometry together by using the strongest concavity. In this way, this research made some contributions to a combining Wasserstein geometry with Information geometry.

研究分野：幾何解析

キーワード：最適輸送理論 情報幾何 測度距離空間 熱流 エントロピー 凸性

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

近年、リッチ曲率の下限および次元の上限を表す曲率次元条件が、Wasserstein 幾何を用いることで、リーマン多様体から微分構造を許容しない測度距離空間に拡張された。ここで Wasserstein 幾何とは、最適輸送理論から導かれる距離空間上の確率測度のなす空間上の距離の幾何学である。そしてリッチ曲率の下限と次元の上限は、Bishop・Gromov の体積比較定理が述べるように距離球の体積の振舞を制御する。よって体積に関わる幾何解析を行う上で、曲率次元条件は重要な役割を果たすことが期待される。

また曲率次元条件を定式化する上で鍵となるのが冪分布と密接に関わる Tsallis エントロピーである。そして情報幾何学の指数分布および相対エントロピーに対する理論は、冪分布および Tsallis エントロピーに対して部分的に拡張される。ここで情報幾何学は、確率測度のなす空間上の計量と接続の幾何学である。しかしその一方で、冪関数と指数関数の違いに基づく Tsallis エントロピーならではの独自の理論もあり、Tsallis エントロピーの性質は解明されていないことが多い。

そして Wasserstein 幾何学と情報幾何学はともに確率測度のなす空間の上の幾何学だが、様相は大きく異なる。しかしお互いに関連しあっているため、両者を併用し補い合うことで、申請者は新しい概念や今まで捉えられなかった現象を描写できると見込んだ。

### 2. 研究の目的

距離空間上の確率測度の等周関数と集中関数の解析を用いた Wasserstein 幾何学と情報幾何学の融合が研究当初の目的であった。ここで等周関数と集中関数は幾何学的基本量である『体積』と『距離』の関係を表す。形式的には集中関数は等周関数の積分であり、等周関数は集合の周長をその測度で下から評価する関数である。そして等周関数を下から評価できれば、集中関数を上から評価することができる。これらの関数不等式をそれぞれ等周不等式と集中不等式と呼ぶ。そして一般に等周不等式と集中不等式の間には対数ソボレフ不等式と輸送不等式と呼ばれる関数不等式があり、任意の次元のユークリッド空間上のガウス測度に対してこれらは全て同値である。そこで一般の距離空間上の確率測度に対して、これらの関数不等式の評価およびそれぞれの関係、特に同値になるための条件を明らかにすることを通して、Wasserstein 幾何学と情報幾何学の融合をし、さらなる幾何解析へ応用することが目的であった。

### 3. 研究の方法

Wasserstein 幾何と情報幾何において、相対エントロピーに付随して得られる理論は基礎土台が築かれ、他方面に応用されている。一方で、Tsallis エントロピーに関する性質は未知の部分が多い。そこで申請者は、Wasserstein 幾何学と情報幾何学の融合によりの未知の領域を解明することを目指していた。

しかし研究が進むにつれ、Tsallis エントロピーに関する両幾何の性質を融合することの困難さに気づき、申請者は考えている不等式の関係性を他の視点から考えることにした。そこで確率論の基礎土台をなすガウス測度に焦点をあて、その周辺事象を詳細に調べた。その結果、東北大学の塩谷隆氏との共著にて、 $N$  次元ユークリッド空間の中の正規直交  $n$  枠を元とする多様体である  $(N, n)$ -スティーフェル多様体の振舞を描写することに成功した(主な発表論文等〔雑誌論文〕 参照)。

また研究に多様な視点を持ち込むために、グラフなどの離散距離空間における曲率の概念の考察を試みた。リッチ曲率の下限の概念はグラフにおいても定式化が進んでいるが、様々な定式化がありそれらの間の関連性は不明瞭なところがある。そこでまず、決定的な定式化がなされている曲面グラフの断面曲率について考察し、新たなる分野に関する基礎知識を蓄え、研究の土台を固めた(主な発表論文等〔雑誌論文〕 参照)。

### 4. 研究成果

申請者は、Wasserstein 幾何と情報幾何の両幾何において、熱流の大域挙動が重要な役割を果たしていることを鑑みて、熱流の漸近解析や形状解析などの大域解析の軸となる対数凹性に注目した。その結果、申請者は東京大学の石毛和弘氏とフィレンツェ大学の Paolo Salani 氏との共著(主な発表論文等〔雑誌論文〕 )にて、ユークリッド空間の熱流が保つ凹性の中で最も強い凹性が対数凹性ではないことを証明し、さらに熱流で保たれる最強の凹性が何であるかを決定した。この最強の凹性を我々は 2-対数凹性と呼ぶ。

ユークリッド空間の熱流における対数凹性の保存則そのものは、H.J.Brascamp と E.H.Lieb が 1976 年に打ち出した不等式から従い、そしてこの不等式は相対エントロピーの Wasserstein 幾何に関する凸性から従う。そしてまた一般の関数の凸性に対する局所的性質と大域的性質の同値性は、熱流の保存則を逆に辿り、Brascamp・Lieb 不等式に対応する熱流の保存則を導く不等式や、この不等式を導くエントロピーの凸性の導出可能性を示唆する。

さらに 2-対数凹性を特徴付ける関数は対数関数の一般化であるため、情報幾何の対数関数および指数関数を基幹とした既存の理論はこの関数を用いて一般化できることが見込める。

以上より、これらの 2 -対数凹性に付随する情報幾何の理論とエンロトピーの凸性は相性が良く、融合できることが大いに期待できる。このように本研究では最初の目的とは異なるものの、最適輸送理論と情報幾何の融合に貢献することができた。

## 5 . 主な発表論文等

[ 雑誌論文 ] ( 計 4 件 )

Ishige Kazuhiro、Salani Paolo、Takatsu Asuka、To logconcavity and beyond、Communications in Contemporary Mathematics、査読あり、2019  
<https://doi.org/10.1142/S0219199719500093>

Takatsu Asuka、Convergence of combinatorial Ricci flows to degenerate circle patterns、Transactions of the American Mathematical Society、査読あり、2019  
<https://doi.org/10.1090/tran/7778>

Shioya Takashi、Asuka TAKATSU、High-dimensional metric-measure limit of Stiefel and flag manifolds、Mathematische Zeitschrift、査読あり、290 巻、2018、873–907  
<https://doi.org/10.1007/s00209-018-2044-y>

高津飛鳥、書評 C. Villani: Optimal Transport-Old and New、数学、査読あり、67 巻、2016、216–221  
<https://doi.org/10.11429/sugaku.0672216>

[ 学会発表 ] ( 計 1 1 件 )

高津飛鳥、測度距離空間としての Stiefel 多様体族の極限、日本数学会 2015 年度秋季総合分科会、2015 年、京都産業大学

高津飛鳥、抽象 Wiener 空間上の Gauss 測度族の Wasserstein 幾何、日本数学会 2015 年度秋季総合分科会、2015 年、京都産業大学

Takatsu Asuka、Behaviors of varphi-Gaussian measures in Wasserstein geometry、Computational information geometry for image and signal processing ( 招待講演 ) ( 国際学会 )、2015 年、ICMS(Edinburgh)

高津飛鳥、Wasserstein/Information geometry and its applications、日本数学会 2016 年年会 ( 招待講演 ) 2016 年、筑波大学

Takatsu Asuka、Wasserstein/Information geometry and its applications、The 7th Pacific RIM Conference on Mathematics 2016 ( 招待講演 ) ( 国際学会 )、2016 年、ソウル ( 韓国 )

Takatsu Asuka、Curvature Dimension condition from the viewpoint of Information geometry、Follow-up Workshop to JTP "Optimal Transportation" ( 招待講演 ) ( 国際学会 )、2016 年、ボン ( ドイツ )

Takatsu Asuka、Riemannian Wasserstein geometry on the space of Gaussian measures over the Wiener space、第 1 回日本-台湾微分幾何研究集会 ( 招待講演 ) ( 国際学会 )、2016 年、早稲田大学

Takatsu Asuka、High-dimensional metric-measure limit of Stiefel and Grassmann manifolds、Dirichlet forms and their geometry ( 招待講演 ) ( 国際学会 )、2017 年、東北大学

高津飛鳥、退化した Circle Pattern に収束するトーラス上の組合せリッチ流、2018 年度秋季総合分科会、2018 年、岡山大学

Takatsu Asuka、To logconcavity and beyond、Workshop on barycenters, convexity on metric spaces and positive operators ( 招待講演 ) ( 国際学会 )、2018 年、ソウル ( 韓国 )

Takatsu Asuka, Convergence of combinatorial Ricci flows to degenerate circle patterns, AIMR Workshop on Pure and Applied Mathematics (招待講演)(国際学会), 2019年、東北大学

〔図書〕(計1件)

桑江一洋; 塩谷隆; 太田慎一; 高津飛鳥; 栗田和正、日本数学会、数学メモアール 第8巻 最適輸送理論とリッチ曲率、2017、111

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/asukatakatsu/>

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。