

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 26 日現在

機関番号：33924

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17537

研究課題名(和文) ローレンツ多様体の基本群の有限性に関する研究

研究課題名(英文) Study on the finiteness of the fundamental groups of Lorentzian manifolds

研究代表者

椋野 純一 (MUKUNO, Junichi)

豊田工業大学・工学部・ポスドクトラル研究員

研究者番号：50737301

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：ローレンツ多様体，より一般の擬リーマン多様体に対して，曲率テンソルの正値性と測地的完備性から基本群の有限性が導かれるかについて考察した．これは，擬リーマン幾何におけるマイヤースの定理の類似があるかを研究することである．測地的完備なローレンツ多様体や擬リーマン多様体のあるクラスで曲率テンソルの正値性からある最大次元のリーマン部分多様体の基本群の有限性が導かれることがわかった．また，曲率テンソルの正値性を満たす測地的完備な擬リーマン等質空間の新しい例を構成した．

研究成果の概要(英文)：I have studied whether or not for Lorentzian geometry, and in general pseudo-Riemannian geometry, the positivity of curvature tensor and the geodesic completeness lead to the finiteness of the fundamental group. This is to research an analogy of the Myers theorem in pseudo-Riemannian geometry. I have found that if classes of geodesically complete Lorentzian manifolds and pseudo-Riemannian manifolds have the positivity of curvature tensor, then the fundamental group of some Riemannian submanifold of maximal dimension is finite. I have constructed new examples of pseudo-Riemannian homogeneous spaces with the positivity of curvature tensor.

研究分野：微分幾何学

キーワード：マイヤースの定理 特異点定理 不定値計量 基本群 測地的完備性 曲率テンソル

### 1. 研究開始当初の背景

曲率による多様体の大域的な位相の制限を研究することは微分幾何の基本的な研究テーマの一つである。正定値計量の幾何であるリーマン幾何では比較定理の理論の発達により曲率と位相に関する多くの関係性が明らかにされてきた。しかしながら、不定値計量の幾何である擬リーマン幾何、その特別な場合である、計量の負符号の数が1であるローレンツ幾何において曲率と位相の関係性は未解明な部分が多い。擬リーマン幾何における曲率と位相の関係性に関する問題として小林俊行氏の問題がある。小林氏の問題はリーマン幾何と擬リーマン幾何における正定曲率の場合での次の類似現象に基づく：2次元以上の正定曲率測地的完備リーマン多様体はコンパクトであり、その基本群は有限群である。一方、Calabi-Markus と Wolf らによって、3次元以上の正定曲率測地的完備ローレンツ多様体、またはより一般に、計量の正符号の数が負符号の数以上の正定曲率測地的完備擬リーマン多様体は非コンパクトであり、その基本群は有限群であることが示された。さらに上述のリーマン幾何の結果は Myers によって断面曲率が下から正の定数で抑えられた場合、より一般にリッチ曲率が下から正の定数で抑えられた場合に一般化された。小林氏の問題は擬リーマン多様体に対して Myers の定理のように必ずしも曲率が一定でない場合に Calabi-Markus と Wolf らの結果を一般化できないかというものである。

当問題は、擬リーマン多様体においても正曲率性が基本群の構造に強い制限を課されることを問う基本的かつ興味深い問題であるが、あまり研究されてこなかった。当問題を解明することが当初の研究の動機である。

ここで、小林氏の問題を考察するうえで注意すべき点である擬リーマン幾何での曲率条件について述べる。Myers の定理を含むリーマン幾何の比較定理の標準的な仮定の一つとして断面曲率が下あるいは上から有界であるという仮定がある。しかし、擬リーマン幾何において断面曲率の有界性条件は有用でない。なぜなら、Kulkarni によって3次元以上のリーマン多様体でない擬リーマン多様体に対して断面曲率が下あるいは上から有界ならば、定曲率になることが示されているからである。つまり、擬リーマン幾何において断面曲率の有界性は非定曲率を含まない。そのため擬リーマン幾何では代理の曲率条件が考えられている。

当研究では曲率条件として、Andersson-Howard の意味での曲率テンソルが正値であるという条件で考察した。Andersson-Howard は、リーマン幾何の断面曲率の有界性条件が曲率テンソルに関する不等式条件と同値であることから、リーマン幾何の断面曲率の有界性条件を擬リーマン幾何に曲率テンソルの不等式条件として自然

に一般化した条件を提示した。Andersson-Howard の曲率条件に関する比較定理に関する結果はすでに、Diaz-Ramos-Garcia-Rio-Hervella による体積比較定理や、Alexander-Bishop らによる局所三角形比較定理などが知られていた。しかしながら、まだ Andersson-Howard の意味で曲率テンソルが正値性であるという条件下での Myers の定理の類似結果は知られていない状況が研究開始時の背景である。

### 2. 研究の目的

当研究の目的は、Andersson-Howard の意味で曲率テンソルが正である測地的完備ローレンツ多様体に対して基本群の構造を研究すること、特に基本群の有限性が導かれるかどうかを調べることである。ただし、研究開始時においてローレンツパラメータ積に対して結果を得ていたため、具体的な研究対象のクラスはローレンツパラメータ積を含む大域的双曲型時空である。ここで、大域的双曲型時空とは相対論的宇宙論から由来するローレンツ多様体のクラスであり、物理学的にも興味もたれている重要なクラスの一つであるが、数学的にもローレンツ距離関数の連続性など良い性質をもつため、興味もたれているクラスである。

### 3. 研究方法

小林氏の問題は、曲率条件と測地的完備性から基本群の有限性を導けるかという問題であるが、対偶をとると、曲率条件と基本群の無限性から測地的不完備性を導けるかという形に言い換えることができる。この言い換えによってローレンツ幾何において大域的双曲型時空に対して Hawking や Penrose らが構築した特異点定理を応用することができる。実際、ローレンツパラメータ積の場合の証明においても Penrose の特異点定理を応用することで証明した。ローレンツ幾何独自に発達した特異点定理を Andersson-Howard の曲率条件の下で考察するアプローチで研究を進めた。

情報収集としてローレンツ幾何関連の国内外の研究集会に参加や発表を積極的に行い、ローレンツ幾何及び擬リーマン幾何の研究者やそれらの幾何に興味をもっている研究者とのセミナーの開催や議論を行った。

### 4. 研究成果

研究開始時において論文準備中であったローレンツパラメータ積における結果は、研究期間中に論文にまとめ、論文雑誌 *Differential Geometry and its Applications* に掲載された。当結果をローレンツ幾何の国際研究集会である 8th International Meeting on Lorentzian Geometry でポスター発表した際にベストポスター賞(20数名のポスター発表者の中から1名のみ受賞)を頂き、海外のローレンツ幾

何学者から私の研究内容について評価して頂いた。

ローレンツパラメータ積をもとに Andersson-Howard の意味で曲率テンソルが正のとき、測地的完備性と基本群の構造に関する研究成果について述べる。まず、以前の結果では、ローレンツパラメータ積のファイバーが閉の場合であった。ローレンツパラメータ積のファイバーが開の場合についても、閉の場合と同様にその基本群が有限であることがわかった。さらに、詳細なトポロジーについて調べた結果、ファイバーが開となる状況はファイバーがユークリッド空間と微分同相になる場合しかないことが分かった。ただし、実際にファイバーがユークリッド空間となる場合が存在するかどうかは未解明である。今後の展望として、ファイバーがユークリッド空間となる場合が存在するかという問題が残る。リーマン幾何における Myers の定理はコンパクト性も含めた結果であるので、そのコンパクト性のローレンツ幾何の類似現象が空間方向に現れるかということを問うており、ローレンツ幾何とリーマン幾何の類似性という点で興味深い。存在、非存在の両方の可能性があり、解明されるべき問題と考える。

一般の大域的双曲型時空の場合で得ている結果について述べる。非正曲率閉リーマン多様体が Andersson-Howard の意味で曲率テンソルの正値性条件を持つ大域的雙曲型時空にコーシー超曲面として等長に埋め込めた場合を考察した。その結果、大域的雙曲型時空が完備でないことが分かった。これは Hawking の特異点定理の類似結果を示すことで導くことができた。一方で、当研究の目的である閉コーシー超曲面を持つ大域的雙曲型時空への一般化に関する研究についてであるが、期間内に解決することはできなかった(研究実績報告書では解決したと記述したが、その後証明に誤りがあることが判明したのでここに報告する)。特異点定理を応用するためには大域的雙曲型時空内のリーマン部分多様体の平均曲率がある程度大きい状況でないと使えないが、そのような平均曲率の大きなリーマン部分多様体の存在を示すことが思うようにできなかった。今後の展望として、Andersson-Howard の意味で曲率テンソルの正値性条件を持つ測地的大域的雙曲型時空の内に存在するコーシー超曲面の平均曲率や誘導計量の曲率に対する微分幾何学的量の制約としてどのようなものがあるかを調べるといふ問題がある。

ローレンツ幾何の枠組みを広げてより一般の擬リーマン幾何で研究することで得た成果について述べる。擬リーマン幾何ではローレンツ幾何にはない困難さがある。具体的にはローレンツ幾何において様々な特異点定理があるが、擬リーマン幾何では特異点定理があまりないからである。その理由として、ローレンツ幾何における特異点定理の多く

の証明では変分法を用いて証明されているが、擬リーマン幾何では変分法の議論がうまくいかないからである。しかしながら、擬リーマン捩れ積で考察した結果、曲率テンソルの正値性から基本群の構造に関する結果を得ることができ、また捩れ積において特異点定理の類似を得ることができた。この結果を足掛かりにさらに一般化し、底空間が計量の符号がすべて負の反リーマン多様体でファイバーが閉リーマン多様体で Andersson-Howard の意味での曲率テンソルの正値性条件を全空間に課し、さらに水平分布が可積分である場合に、ファイバーの基本群の有限であること及び底空間をその計量を-1倍することでリーマン多様体としたときにその曲率が負であることを示した。系として、全空間が閉であれば、その基本群が指数増大であるというリーマン幾何とは異なった現象を発見した。これは、リーマン多様体の正曲率性と負曲率性の混合の性質を正曲率の擬リーマン多様体が有する可能性を示唆している。別視点で、当結果はある種の特異点定理という見方をすれば、擬リーマン幾何において Hawking や Penrose らのある種の特異点定理の類似の存在の可能性を示唆している。当結果はプレプリントとしてアーカイブ(arXiv:1704.04944)で公開しており、同時に論文雑誌に投稿中である。今後の展開として、私の結果では水平分布の可積分性を仮定しているが技術的な仮定と思われ、その仮定を外すことができると私は予想している。実際に予想の状況が成り立つが、我々の定理の仮定が成り立たない具体例を構成した。構成した例は、非定曲率擬リーマン等質空間で Andersson-Howard の意味で曲率テンソルの正値性条件を満たす新しい例である。これはリーマン幾何における Wallach の正曲率リーマン等質空間の構成法を参考に構成した。別種の同じく Andersson-Howard の意味で曲率テンソルの正値性条件を満たす擬リーマン等質空間も発見することもできた。このように Andersson-Howard の意味で曲率テンソルの正値性条件を満たす新しい様々な例をリーマン幾何で知られている構成法の類似を参考に構成していくことができるかという問題も今後の展望として興味深い。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

1 Jun-ichi Mukuno, On the fundamental group of a complete globally hyperbolic Lorentzian manifold with a lower bound for the curvature tensor, *Differential Geometry and its Applications*, 41 (2015), 33-38 (査読有) DOI: 10.1016/j.difgeo.2015.04.002.

〔学会発表〕(計8件)

1 椋野純一, On the fundamental group of semi-Riemannian manifolds with positive curvature operator, Rigidity School Nagoya 2017, 名古屋大学, 2017年11月25日.

2 椋野純一, On the fundamental group of semi-Riemannian manifolds with positive curvature operator, The third Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry, ICMAT, Madrid, Spain, 2017年9月20日-22日(ポスター発表).

3 椋野純一, 正の曲率作用素を持つ擬Riemann多様体の基本群について, 日本数学会 2017年度秋季総合分科会, 山形大学, 2017年9月13日.

4 椋野純一, On the fundamental group of a complete globally hyperbolic Lorentzian manifold with a lower bound for the curvature tensor, 8th International Meeting on Lorentzian Geometry, Universidad de Málaga, Málaga, Spain, 2016年9月20日-23日(ポスター発表).

5 椋野純一, 曲率の大域的双曲型ローレンツ多様体の基本群について, 茨城高専数学セミナー, 茨城工業高等専門学校, 2016年3月15日.

6 椋野純一, On the fundamental group of a complete globally hyperbolic Lorentzian manifold with a lower bound for the curvature tensor, International conference Relativity and Geometry in memory of André Lichnerowicz, Institut Henri Poincaré, Paris, France, 2015年12月14日-16日(ポスター発表).

7 椋野純一, 正曲率の大域的双曲型ローレンツ多様体の基本群について, きりたんぼ数学セミナー, 秋田工業高等専門学校, 2015年11月8日.

8 椋野純一, On the fundamental group of a complete globally hyperbolic Lorentzian manifold with a lower bound for the curvature tensor, Geometry and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces, RIMS, 京都大学, 2015年6月25日.

〔その他〕

ホームページ等

Jun-ichi Mukuno 's Home Page

(<https://sites.google.com/site/junichimukuno/>)

(1)研究代表者

椋野 純一(MUKUNO, Junichi)

豊田工業大学・工学部・ポスドクトラル  
研究員

研究者番号: 50737301