

令和 2 年 5 月 18 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K17543

研究課題名(和文) 微分式系の高階偏微分方程式への応用と特異性の研究

研究課題名(英文) A study of geometry of higher order partial differential equations equipped with singularities

研究代表者

澁谷 一博 (Shibuya, Kazuhiro)

広島大学・理学研究科・准教授

研究者番号：00569832

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：微分式系の幾何学とは多様体上の接空間の部分束の幾何学であり、微分式系を包括するより一般的な理論として、外微分式系の理論がある。それらの理論は微分方程式を幾何学的に扱う理論であり、特に複雑な現象を記述する非線形微分方程式に対しても有用である。本研究では、上記の微分式系、外微分式系の理論を用いて、古典的な理論を多未知関数、高階偏微分方程式に応用する視点からの研究を行い、基本的、根本的な性質を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

微分方程式は自然現象、社会現象を科学的に記述、研究するために極めて重要な研究対象であり、また、個別の微分方程式ではなく、統一的に微分方程式を扱い、その共通の性質を明らかにすることは意義のあることである。一方で、微分方程式の持つ幾何学的性質を明らかにすること、また逆に幾何学的に重要な性質を持つ対象を微分方程式から構成することは微分幾何学の視点からも意義のあることである。

研究成果の概要(英文)：A subbundle of the tangent bundle on a manifold is called a differential system.

The theory of differential systems is known as a method to study partial differential equations, geometrically. Moreover, the theory of exterior differential systems which is a generalization of differential systems is also useful for the geometrical study of partial differential equations. On the other hands, partial differential equations are used to describe natural phenomena, therefore to study partial differential equations is important. In this situation, we apply the theory of differential systems and exterior differential systems to partial differential equations, especially, higher order or multi unknown functions partial differential equations. we clarify basic and fundamental properties for the equations.

研究分野：微分方程式の幾何学

キーワード：微分式系 外微分式系 田中理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

微分式系の幾何学の理論は微分方程式を幾何学的に扱おうとする立場で Cartan, Engel, Goursat, Lie, Monge, Darboux らによって研究されてきた。今日においても微分方程式(特に非線形)を扱う理論としては最高のもののひとつである。微分式系の幾何学とは多様体上の接空間の部分束の幾何学である。そのなかで微分方程式は正準微分式系付きのジェット空間の部分多様体(一般には variety)として捉えられ、そのとき解は積分多様体として現れる。また田中理論においてはジェット空間の正準微分式系に付随する冪零階別リー環の部分環として微分方程式は捉えられる。また、微分式系の一般化である外微分式系の理論(多様体上の微分形式全体の成す代数内で外微分による作用で閉じたイデアルの理論)を用いると、微分式系では捉えられない微分方程式を幾何学的に定式化することが可能となる。特に 2 階 1 未知関数の微分方程式は古典的な理論として、広く多く研究がなされてきているが近年においては、応用の観点からも古典的な理論の高階化や多未知関数化が求められていた。

2. 研究の目的

研究背景を踏まえて、微分式系、外微分式系の理論、田中理論を用いて微分方程式の幾何学的構造の研究を次のように行うことを研究目的とする。

・2 独立変数 1 未知関数の偏微分方程式に限らず、より一般の微分方程式に対して、基本的な性質を微分式系の一般論の視点から統一的、幾何学的に研究し明らかにする。さらに、上記の一般論を踏まえて、偏微分方程式の(高階の)接触同値の下での分類問題の研究や、微分方程式の解の求積法の確立、高階偏微分方程式の幾何学的性質の研究、さらに広く微分幾何学一般への応用を与える事を研究目的とする。

3. 研究の方法

偏微分方程式に対して、構造方程式、派生系、表象代数、コーシー特性系、モンジュ特性系など微分式系、外微分式系の理論における不変量を用いて研究を行った。特にモンジュアンペール方程式の一般化の研究に対しては、微分方程式の立場から見ると、変数変換の一種であり、幾何学の立場から見ると、対称性を表す接触変換の視点からの研究を行った。

4. 研究成果

2 独立変数 1 未知関数 2 階偏微分方程式は双曲型、放物型、楕円型に分類され、モンジュ特性系等の不変量が解の構成等(ダルブー可積分、特性系の解法)に関して重要な役割を果たしており、方程式ごとにそれらの不変量を調べることは重要な問題である。正規系等の特定の形をした偏微分方程式に対してはモンジュ特性系は具体的に書き表すこと(表現公式)が出来、可積分性を計算により判別できることが知られていたが、一般に対する表現公式は知られていなかった。そのような中、一般に与えられた偏微分方程式に対するモンジュ特性系の表現公式を与えることに成功した。また、モンジュ特性系以外のいくつかの不変量に対する表現公式も得られた。

次に 2 独立変数 1 未知関数 2 階偏微分方程式である双曲型 f-Gordon 方程式について研究を行った。f-Gordon 方程式は波動方程式、リュービル方程式、Sine-Gordon 方程式、Klein-Gordon 方程式などの数学的にも物理的にも重要な方程式を例として含むクラスである。

一般に双曲型 2 独立変数 1 未知関数 2 階偏微分方程式にはモンジュ特性系と呼ばれる接触変換で不変な部分束が二つ定義される。モンジュ特性系がある条件を満たすときに元の微分方程式はダルブー可積分であると言われ、その場合には滑らかな解の構成法が知られている(重ね合わせの原理)。それに対し、双曲型 f-Gordon 方程式のモンジュ特性系の構造を明らかにして、それによりダルブー可積分である双曲型 f-Gordon 方程式を完全に決定した。また接触変換(変数変換)の下での標準形も決定することが出来た。すなわち、ダルブー可積分である双曲型 f-Gordon 方程式は接触変換で波動方程式、リュービル方程式に標準化されるものに限る、ことを明らかにした。

さらに接触変換(正準微分式系付き 2jet 空間の間の同型写像)の観点からの研究を行った。古典的な 1 階偏微分方程式の明示的な接触変換を拡張する形で高階の接触変換はジェット空間の正準微分式系を保存する変換として幾何学的に定式化されているが、その明示的な表示は知られていなかった。それに対し、n 変数 1 未知関数 2 階のジェット空間に対しその接触変換の明示的な表示に成功した。これは応用として変数変換を行い偏微分方程式を具体的に簡略化する、という視点から見ても非常に重要な結果である。また、明示的な表示が得られたことによりルジャンドル変換、初等型変換の一般形に当たる接触変換のクラスを見つけることにも成功した。さらにこの結果の応用も行った。2 独立変数モンジュ-アンペール方程式は接触変換の下で不変であることが知られていたが、適当な条件下では接触変換で不変な方程式はモンジュ-アンペール方程式に限る事を示した。また一般化された n 独立変数モンジュ-アンペール方程式も 2 階の接触変換で不変であることも明らかにした。さらに微分方程式に対する既約性の概念を定式化し正則性と既約性の対応関係も明らかにした。

次に外微分式系の観点からの研究も行った。外微分式系(多様体上の微分形式全体の成す代数内で外微分による作用で閉じたイデアル)の理論は微分式系の理論で扱えない範疇の微分方程式、特に非線形偏微分方程式を扱うことが出来る理論として優れている。この理論を数学的のみならず応用上も重要であるモンジュアンペール方程式に応用した。古典的な 2 階 2 独立変数 1 未

知関数のモンジュアンペール方程式の外微分式系を用いた定式化、多変数化は以前から知られているが、これに対し、接触変換の視点からモンジュアンペール方程式は"ある行列の小行列の和の形で表される偏微分方程式"であることに着目し、それにより幾何学の立場から統一的に一般化(高階化、多未知関数化、連立化)することに成功した。

また、多未知関数の偏微分方程式の研究も行った。特に2独立変数2未知関数1階決定系連立偏微分方程式の型の分類問題の研究を行った。2独立変数1未知関数2階単独偏微分方程式の研究に代表されるように1未知関数の偏微分方程式の幾何学的分類問題は、19世紀からダルブー、カルタンらにより研究されてきているなど、広く研究が行われてきている。上記でも述べたように、2独立変数1未知関数2階単独偏微分方程式は大まかに判別式により双曲型、放物型、楕円型に分類され、この型の分類は接触変換による同値関係の下での分類(田中理論における表象代数と呼ばれる冪零階別リー環の同型類による分類)と一致していることが知られている。一方で、多未知関数の偏微分方程式の幾何学的は、個別の微分方程式に対するアプローチはあるものの、未開拓な部分が多い。そのような中、2独立変数2未知関数1階決定系連立偏微分方程式の型の分類問題に対し、正則性の仮定の下において、接触変換の下では5つの型、独立条件を保存する接触変換の下では6つの型に分類されることを示した。さらに、判別式を定義することにより、与えられた偏微分方程式が、どの型になるかの判定法も与え、また各型に対して表象代数の標準基底の具体的な表示を与えることに成功した。この表示は微分方程式の可積分条件の具体的な表示を与えることになっており、解の求積論を構築するための基盤となる情報となり、今後の研究の発展が期待されるものである。

最後に微分式系の理論の応用として行ったフィンスラー幾何学の研究について述べる。フィンスラー幾何学はユークリッド幾何学、リーマン幾何学の一般化で、各点の接空間にノルムが与えられた空間を研究する分野であり、応用上も、流れのある空間の中での運動を記述する為には不可欠な概念であり、また変分問題の視点からも重要な研究分野である。特に曲率1のフィンスラー曲面を研究行った。リーマン幾何学においては曲率1の曲面は球面に限るが、フィンスラー曲面ではその限りではない。しかし、球面以外の曲率1のフィンスラー曲面は具体的な例がほとんど知られていない。そのような中、リーマン幾何学における正曲率 Zoll 回転面と曲率1のフィンスラー曲面との間の関係性を明示的に記述することにより、豊富な具体例を供給することに成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Sabau, Sorin V.; Shibuya, Kazuhiro; Yoshikawa, Ryozo	4. 巻 3 no.4
2. 論文標題 Geodesics on strong Kropina manifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Eur. J. Math.	6. 最初と最後の頁 1172-1224
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Noda, Takahiro and Shibuya, Kazuhiro	4. 巻 82
2. 論文標題 Type-changing PDE and singularities of Monge characteristic systems	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Math.	6. 最初と最後の頁 57-73
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 SABAU SORIN V., SHIBUYA KAZUHIRO	4. 巻 101
2. 論文標題 A VARIATIONAL PROBLEM FOR CURVES ON FINSLER SURFACES	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of the Australian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 418 ~ 430
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/S1446788716000161	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kiyohara Kazuyoshi, Sabau Sorin V., Shibuya Kazuhiro	4. 巻 16
2. 論文標題 The geometry of a positively curved Zoll surface of revolution	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Geometric Methods in Modern Physics	6. 最初と最後の頁 1941003 ~ 1941003
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219887819410032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 14件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 澁谷一博
2. 発表標題 接触変換で不変な微分方程式のクラスについて
3. 学会等名 合宿セミナー 2018 in 福山（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazuhiro Shibuya
2. 発表標題 Geometry of PDE and classification problems
3. 学会等名 Capital Normal University-Hiroshima University Joint Conference on Mathematics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazuhiro Shibuya
2. 発表標題 Geometry of 2nd order PDE and contact transformations
3. 学会等名 2017 Chongqing Workshop on Differential Geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 澁谷一博
2. 発表標題 f-Gordon方程式のダルブー可積分性とその周辺
3. 学会等名 山口佳三先生退職記念研究集会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazuhiro Shibuya
2. 発表標題 A classification problem for 3rd order PDEs via differential systems
3. 学会等名 The second China-Japan geometry conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kazuhiro Shibuya
2. 発表標題 A classification problem for 3rd order PDEs via differential systems
3. 学会等名 The 51-th Symposium on Finsler Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kazuhiro Shibuya
2. 発表標題 A classification problem for 3rd order PDEs via differential systems
3. 学会等名 Geometry Seminar in Northeast Normal University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 澁谷 一博
2. 発表標題 微分方程式の幾何学と分類問題I, II
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 濑谷一博
2. 発表標題 3階偏微分方程式の幾何学へ向けて
3. 学会等名 福岡大学微分幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 濑谷一博
2. 発表標題 カルタン-ケーラーの定理とその応用1,2
3. 学会等名 数理物理・幾何ミニワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 濑谷一博
2. 発表標題 A variational problem for curves on Finsler surfaces
3. 学会等名 福岡幾何学研究集会（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 濑谷一博
2. 発表標題 A variational problem for curves on Finsler surfaces
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2016（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kazuhiro Shibuya
2. 発表標題 Contact geometry and Monge-Ampere equations
3. 学会等名 The 54th Symposium on Finsler Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 澁谷一博
2. 発表標題 接触変換によるモンジュアンペール方程式のクラスの不変性
3. 学会等名 北大幾何学コロキウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 阿部誠, 本田竜広, 澁谷一博	4. 発行年 2019年
2. 出版社 学術図書出版社	5. 総ページ数 203
3. 書名 基礎線形代数 第二版	

1. 著者名 阿部誠, 本田竜広, 澁谷一博	4. 発行年 2018年
2. 出版社 学術図書出版社	5. 総ページ数 198
3. 書名 基礎線形代数	

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	サバウ ソリン (Sabau Sorin)	東海大学・教授	
研究協力者	野田 尚廣 (Noda Takahiro)	九州工業大学・准教授	