様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：３２４０７

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：１５Ｋ１７５４５

研究課題名（和文）ブーゼマン・ポアソン核を許容するアダマール多様体の重心写像の幾何学

研究課題名（英文）Geometry of barycenter map on Hadamard manifolds admitting Busemann-Poisson kernel

研究代表者

佐藤　弘康（SATOH, Hiroyasu）

日本工業大学・工学部・准教授

研究者番号：００３７５３９６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,100,000円

研究成果の概要（和文）：(1)２つの確率測度の幾何平均測度の概念を定義した．この概念を用いることにより，任意の２つの確率測度を結ぶ測地線分が一意的に存在することを示した．また，アダマール多様体上の重心写像のファイバーから任意に２点をとるとき，この２点を結ぶ測地線がファイバーに含まれるための必要十分条件が，２点の幾何平均測度もまた同じファイバーに含まれることであることを示した．
(2)確率測度全体のなす空間上のα-接続に関する測地線分についての諸性質を明らかにした．
(3)調和多様体において「超幾何型」とよばれる新たなクラスを定義し，超幾何型調和アダマール多様体上において，球フーリエ変換論を展開した．

研究成果の概要（英文）：(1) We defined the normalized geometric mean of two positive probability measures. By using this notion, we found that there exists the unique geodesic segment joining arbitrary two probability measures. Moreover, we showed that a geodesic segment belongs entirely to a fiber of the barycenter map on a Hadamard manifold, if and only if endpoints of the geodesic and its normalized geometric mean belong same fiber.
(2) We obtained some properties of geodesics with respect to alpha-connection on the space of all probability measures with positive density function.
(3) We defined a class of Harmonic manifolds of hypergeometric type and we developed the theory of the spherical Fourier transform on a Hadamard harmonic manifold which is of hypergeometric type.

研究分野：微分幾何学

キーワード：アダマール多様体　確率測度の空間　フィッシャー計量　重心　幾何平均　測地線　調和多様体　球フーリエ変換

１．研究開始当初の背景

(1) ブーゼマン・ポアソン核とは
n 次元アダマール多様体 X の理想境界 ∂X には，$X\cup\partial X$ が n 次元円板 D^n と同相となるような位相（錐位相）がはいり，∂X 上の連続関数を境界条件とする X 上の調和関数を求める問題（Dirichlet 問題）を考えることができる．この問題の基本解 $P(x,\theta)$ を X 上のポアソン核とよぶ．ポアソン核は負曲率多様体，または負曲率多様体に準等長（quasi-isometric）な空間上で存在性が保証されている．
一方，$o\in X$ を基点とするブーゼマン関数とは，理想境界点 $\theta\in\partial X$ に対して定まる X 上の関数 $B_\theta(x)$ で，直観的には無限遠点との距離の差 $d(x,\theta)-d(o,\theta)$ と定義される関数である．双曲空間上のポアソン核は，ブーゼマン関数と体積エントロピー ρ を用いて

$$P(x,\theta)=\mathrm{Exp}\,\{-\rho B_\theta(x)\}$$

と表される．また，ダメック-リッチ空間とよばれる等質空間の族（双曲空間も，特別な場合としてこの族に含まれる）のポアソン核も同様の表示をもつ[IS1]．このように空間 X 上のポアソン核がブーゼマン関数の指数関数として表されるとき，「X はブーゼマン・ポアソン核を許容する」とよぶことにする．本研究の目的は，ブーゼマン・ポアソン核を許容するアダマール多様体がどのような空間なのか（ダメック-リッチ空間に限るのか)，明らかにすることである．

(2)なぜ，ブーゼマン・ポアソン核を許容する空間を研究対象とするのか
X 上の ポアソン核は，X から ∂X 上の正値確率測度の空間 $P(\partial X)$ への写像 ϕ を定める．これをポアソン核写像とよぶ．$P(\partial X)$ には，統計学や情報理論におけるフィッシャー情報量に由来するフィッシャー情報計量とよばれる計量 G が備わり，無限次元リーマン多様体としての幾何構造をもつ．ポアソン核写像 $\phi:X\to P(\partial X)$ によって G を X 上に引き戻すことにより，引き戻し計量 ϕ^*G と X の元々の計量 g とを比較することができる．
X がダメク-リッチ空間のとき，ϕ^*G と g は定数倍の違いしかなく（つまり，ϕ は相似写像)，さらに ϕ は調和写像であることがわかっている．「相似写像かつ調和写像」であるとは，写像の極小性と同値であり，この場合 ϕ は非常に性質のよい写像と考えることができる（例えば，2 点間の最短経路を与える測地線も，空間内の閉曲線を境界とする石鹸膜のモデルも極小写像の像と解釈できる)．
一方，ポアソン核写像 ϕ が相似かつ調和であるならば，X はブーゼマン・ポアソン核を許容することがわかっている[IS2]．
本研究の目的は「ポアソン核写像が相似かつ調和となるようなアダマール多様体は ダメク-リッチ空間以外に存在するのか」という問題の部分解を与えることと解釈できる．

(3)：重心写像とは
正値確率測度 μ に対して，ブーゼマン汎関数

$$B_\mu(x)=\int_{\theta\in\partial X} B_\theta(x)\,d\mu(\theta)$$

の臨界点 x を対応させる写像 bar: $P(\partial X)\to X$ を重心写像とよぶ．重心写像を用いた研究結果は，Douady-Earle や Besson らによるものがある．前者は円周 S^1 上の同相変換を円板 D^2 の同相変換に拡張可能であること示し，後者は階数１非コンパクト型対称空間の剛性定理に関する結果である．ブーゼマン・ポアソン核を許容するアダマール多様体 X において，X の変換 f と ∂X の変換 F が，ポアソン核写像，重心写像の両者と可換ならば，f は等長写像であることがわかっている[IS3]．

（引用文献）
[IS1] M. Itoh and H. Satoh, Information geometry of Poisson kernels on Damek-Ricci spaces, Tokyo J. Math. 33, No.1(2010), 129-144.
[IS2] M. Itoh and H. Satoh, The Fisher information metric, Poisson kernels and harmonic maps, Differential Geom. Appl. 29 , Supplement 1, (2011), S107-S115.
[IS3] M. Itoh and H. Satoh, Geometry of Fisher information metric and the barycenter map, Entropy 17, Issue 4 (2015), 1814-1849.

２．研究の目的

(1) 以上の背景を踏まえ，本研究では ブーゼマン・ポアソン核を許容するアダマール多様体 X がどのような空間か，ポアソン核写像と重心写像の幾何学からのアプローチにより，明らかにする．さらに，ブーゼマン・ポアソン核を許容するという条件に加え，どのような性質がダメック-リッチ空間を特徴付ける本質的なものなのか考察する．

(2) (1)の補助的研究として，(i)ダメック-リッチ空間の特徴である調和多様体の諸性質，および（ii）正値確率測度全体のなす空間の情報幾何的性質についても考察する．

３．研究の方法

(1) ブーゼマン・ポアソン核を許容する 2 つの アダマール 多様体 X_0, X の間になんらかの意味でよい写像 f（たとえば，準等長写像など）が存在するとき，ポアソン核写像や重心写像の性質を用いて，f が等長写像となることを示す．

(2) ブーゼマン・ポアソン核を許容するアダマール多様体上のファイバー空間としての重心写像の性質を明らかにする．

４．研究成果

(1) 確率測度の幾何平均

確率測度の（正規化された）幾何平均測度の概念を定義した．これを用いることにより，(i) 任意に与えられた２つの正値確率測度を結ぶ測地線の具体的な記述式を導き，任意の 2 つの確率測度に対し，これらを結ぶフィッシャー計量に関する測地線が唯一つ存在することを明らかにした．(ii) また，アダマール多様体の理想境界上の２つの確率測度を結ぶ測地線分が重心写像のファイバーに含まれるための必要十分条件が，測地線分の端点とその幾何平均測度がともに同一のファイバーに含まれることであることがわかった．

(2) 確率測度全体のなす空間のα-測地線

情報幾何において重要な役割をはたすα-接続（実数パラメーターをもつアフィン接続の族）とよばれる幾何構造がある.伊藤光弘氏（筑波大学）は，確率測度全体のなす空間において，α-接続の具体的な表示式を導き，それらの接続に関する測地線が満たすべき微分方程式を得た．本研究では，(i) $\alpha=\pm1$ の場合についてその微分方程式を解き，(±1)-測地線の具体的表示式を導き，任意の 2 つの確率測度に対してそれらを端点とする (±1)-測地線分がただ一つ存在することと，(ii) (±1)-測地線分の全運動エネルギーがカルバック・ライブラー情報量の対称部分と関連していることを明らかにした（なお，有限次元統計多様体においては,既に同様の結果が得られている）．(iii) また，確率測度の（正規化された）冪平均の概念を定義することにより，(±1)-測地線分およびフィッシャー計量に関する測地線分（0-測地線分）の中点が，端点の冪平均として特徴づけられることを明らかにした．(iv) 一般のαについては，2016 年 6 月に参加した関大微分幾何研究会での研究議論において，アフィン微分幾何の方法を利用することにより，測地線の方程式が得られるとの助言を得た．この方法によって得られる曲線の方程式が，伊藤氏が導いた測地線の微分方程式を満たすことを確認した．

(3) 調和アダマール多様体上の球フーリエ変換

Anker らはダメック-リッチ空間上の球フーリエ変換論を，Koornwinder による Jacobi 関数と Jacobi 変換の特別な場合に帰着することにより確立した．この方法の本質は，ラプラス作用素の固有関数方程式が，変数変換 $z=-\sinh^2(r/2)$ により超幾何微分方程式に変換されることである．この事実に着目し，(i)「超幾何型調和多様体」の概念を定義し，調和アダマール多様体において超幾何型であることが，リーマン体積要素がある特定の形で記述できることと同値であることを示した．(ii)また，調和アダマール多様体において，ラプラス作用素の固有関数方程式が，変数変換によって超幾何微分方程式に変換されるならば，その変数変換は $z=-\sinh^2(lr/2)$ のみであることを示した．(iii)さらに，超幾何型調和アダマール多様体において，Koornwinder の方法に依らずに，球フーリエ変換の反転公式，Paley-Wiener 型定理，Plancherel の定理をより幾何的な方法で証明することに成功した（伊藤光弘氏（筑波大学）との共同研究）.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

① 伊藤光弘，佐藤弘康，論説「確率測度空間の情報幾何学と重心写像」，数学 69 巻，4 号 (2017)，387-406.（査読有）

② M. Itoh and H. Satoh, Information geometry of Busemann-barycenter for probability measures, Intern. J. Math. 26, No. 5 (2015).（査読有） https://doi.org/10.1142/S0129167X15410074

〔学会発表〕（計１０件）

① 伊藤光弘，佐藤弘康，超幾何型調和多様体と球 Fourier 変換論，日本数学会 2018 年度年会，2018 年 3 月 20 日(火)，東京大学.

② 佐藤弘康，確率測度の空間上の情報幾何とそのアダマール多様体の幾何への応用の試み，東海大学理学部数学・情報数理談話会，2017 年 6 月 30 日(金)，東海大学湘南校舎.

③ H. Satoh, Information geometry on the space of all probability measures having positive density function, Colloquium at Sungkwunkwan University,

2016年11月24日(木)，成均館大学（大韓民国水原市）．

④ 佐藤弘康，確率測度全体のなす空間上のα-測地線と平均測度の幾何，ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺 (8)」，2016年9月12日(土)，北海道大学.

⑤ H. Satoh, Information geometry of divergences and means on the space of all probability measures having positive density function (Poster Session), Differential Geometry and its Applications, July, 2016年7月12日(火)，Masaryk University（チェコ共和国Brno市）．

⑥ 佐藤弘康，確率測度の空間上の平均とダイバージェンスの情報幾何，関大微分幾何研究会，2016年6月26日(日)，関西大学.

⑦ 伊藤光弘，佐藤弘康，確率測度空間のFisher 情報計量と距離関数，日本数学会2016年度年会，2016年3月19日(土)，筑波大学.

⑧ 伊藤光弘，佐藤弘康，Fisher 情報計量の測地線と一般化平均，日本数学会2016年度年会，2016年3月19日(土)，筑波大学.

⑨ 佐藤弘康，Hadamard多様体上の ポアソン核と重心の幾何学，部分多様体幾何とリー群作用2015，2015年9月8日(火)，東京理科大学 森戸記念館

⑩ 佐藤弘康，調和Hadamard多様体と Gauss超幾何微分方程式，第62回 幾何学シンポジウム，2015年8月28日(金)，東京理科大学 神楽坂キャンパス

６．研究組織

(1)研究代表者

佐藤　弘康（SATOH, Hiroyasu)
日本工業大学・工学部・准教授
研究者番号：00375396