3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ９ 月　 ５ 日現在

機関番号：３７１０２

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：１５Ｋ１７５４７

研究課題名（和文）特異点を持つ曲線と曲面の研究

研究課題名（英文）A study on curves and surfaces with singularities

研究代表者

福永　知則（Fukunaga, Tomonori）

九州産業大学・理工学部・特任講師

研究者番号：２０６４７６０６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：動標構を用いた特異点を持つ曲線と曲面についての研究を行いました。ユークリッド空間内の平面曲線で、法方向を決定することができるフロンタルと呼ばれるクラスの曲線に対して、縮閉線と開伸線を定義して、その幾何学的性質と特異点の関係を研究しました。また、ユークリッド空間の単純閉フロンタルが凸であることの特徴付けを、フロンタルの曲率を用いて与えました。更に、特異点を持つ曲面を研究するための新たな枠組みとして、枠付き曲面と呼ぶ概念を定義し、その基礎理論を構築しました。特に、特異点を持たない曲面の基本不変量やガウス曲率・平均曲率に相当するものを定義し、それらの量の性質と曲面の特異点との関係を与えました。

研究成果の概要（英文）：I studied curves and surfaces with singularities by using moving frames. We gave the definition of evolutes and involutes of frontals in the Eucledian plane. Then we gave relations between geometric properties and singularities of frontals. Moreover, we gave a characterization of convexity of simple closed frontals in the Euclidean plane by using the curvature of the frontal. On surfaces with singularities, as a new approach to study surface with singularities, we introduced a notion of framed surfaces and constructed a fundamental theory. Especially, we defined the fundamental matrices and curvatures of framed surfaces. Then we study on a relation between a properties of the curvatures and a type of singularities.

研究分野：特異点論

キーワード：特異点　フロンタル　波面　動標構　縮閉線　開伸線

１．研究開始当初の背景

特異点を持つ曲線と曲面の研究は様々なアプローチからの研究がありますが、私たちは古くから用いられている動標構を用いて研究をする方法に着目しました。その背景として、2012 年に私と高橋雅朋（室蘭工業大学）が導入したルジャンドル曲線の曲率の理論があります。通常、特異点を持つ曲線に対しては古くから知られている曲線の動標構は構成できませんが、私たちは新たな方法を用いて特異点を持つ曲線（ルジャンドル曲線のフロンタル）に対して枠を構成しました。更に、その枠を用いて曲率を構成しました。この曲率は曲線の様々な性質を調べるのにとても有効であり、2014 年までに、この曲率を用いて、特異点を持つ平面曲線に対して様々な研究結果を発表しました。そこで、これらの研究流れを踏まえた上で、この曲率を用いて、特異点を持つ曲線の様々な性質、特に大域的な性質や曲線の発展方程式などへの応用を調べ、特異点を持つ曲線への理解を深めようと計画したことが、本計画の曲線に関する部分の背景です。

更に、特異点を持つ曲線の高次元化として、特異点を持つ曲面は非常に重要な研究対象であり、現在も盛んに研究が行われている分野であります。曲面に現れる特異点のクラスとして重要なものに、カスプ辺、ツバメの尾、カスプ的交差帽子、交差帽子などがありますが、それらを包括的に扱うことのできる不変量は、私の知る限り知られていませんでした。そこで、特異点を持つ曲面をより直接的・包括的に扱う手法として、動標構を用いた「枠付き曲面の理論」を構築する発想に至りました。具体的には、動標構を用いた基本不変量や曲率を定義し、正則曲面論におけるガウス曲率や平均曲率の類似物を構成することにより、特異点付近での形状を扱う理論を構築するという発想です。

２．研究の目的

本研究の目的は、特異点を持つ曲線と曲面に対して動標構を用いることにより、位相幾何学や微分幾何学的性質を明らかにすることです。

（１）特異点を持つ曲線の研究に関しては、主にユークリッド空間内の特異点を持つ曲線を研究対象とし、その局所的性質（部分的な形）や大域的性質（全体の形）などの幾何学的な特徴を調べることを目的とします。また、そのような幾何学的特徴と特異点との関係を明らかにすることも、重要な目的の一つです。そのような研究の例として、ある曲線から特定の操作でつくられる曲線である、「縮閉線」や「伸開線」を研究対象とします。例えば正則曲線論において、縮閉線の特異点は元の曲線の頂点に対応していることが知られています。このような、特異点と幾何的特徴との関係を、より広いクラスの曲線に対して拡張し深化させることが目的のひとつです。

（２）特異点を持つ曲面の研究に関しては、特異点を持つ曲面を直接的かつ包括的に扱う理論として構築することが目的です。そのために、「枠付き曲面」を導入し、先行研究とは異なる視点から曲率を定義して、特異点を持つ曲面を研究するための新たな枠組みを構築します。具体的には、正則曲面の基本定理に相当する定理（存在性定理と一意性定理）が成立つような基本量を定義し、それらの基本量を用いて、曲率などの幾何学的な意味の見えやすい量を取り出し、特異点の微分幾何学的な性質を調べることを目的とします。

さらに位相幾何的、微分幾何的視点からの研究を融合させ、ガウス・ボンネ型定理のように、曲面の位相不変量と微分幾何学的な不変量の関係性を明らかにすることも目指しています。

３．研究の方法

特異点を持つ曲線・曲面の研究共に、動標構を用いた手法により研究を行います。

（１）特異点を持つ曲線の研究に関しては、私達が先行研究で導入したルジャンドル曲線の曲率を用います。ルジャンドル曲線の曲率に対しては存在性定理と一意性定理が成立つことにより、基本的にはルジャンドル曲線の曲率は、ルジャンドル曲線（とそのフロンタル）の情報を全て含んでいることがわかります。また、曲率を用いて曲線同士の接触や特異点の型を判定することも可能なので、ルジャンドル曲線やそのフロンタルを研究する際に非常に有用な道具となります。本研究では、この曲率を応用し、曲線の性質を調べる手法を取ります。

（２）特異点を持つ曲面の研究に関しても、ルジャンドル曲線の曲率の発想を参考にして研究を進めます。特異点を持つ曲面に対して、それに沿う動標構を与え、曲面と動標構の組を考えたものを枠付き曲面と呼びます。基本的には枠付き曲面の微分や動標構の微分（つまり動き方）を動標構で記述することにより、曲面の不変量を得るという方法を取ります。ただし、そのままの不変量の形では幾何学的な性質は見えにくいので、正則曲面のガウス曲率や平均曲率の構成方法や、カスプ片・ツバメの尾・カスプ的交差帽子に対する曲率の構成方法などを参考にし、枠付き曲面の不変量から幾何学的な意味のある不変量を得るという方向性で研究を進めます。

４．研究成果

（１）ユークリッド平面内のフロンタルに対する縮閉線と伸開線の研究：ユークリッド平面内のある条件を満たすフロンタルに対して、その縮閉線及び伸開線を定義し、その性

質について調べました。先行研究として、ユークリッド平面内の変曲点を持たないフロントに対しては、縮閉線と伸開線が定義されており、その幾何学的・特異点論的な性質が調べられていました。一方、変曲点を持つフロンタルに対しては縮閉線を定義することはできませんでした。しかし、変曲点を持つ場合でも、その点が変曲点かつ特異点ならば（すなわち、フロントでないなら）縮閉線を定義できることがわかります。そこで、私達は必ずしもフロントではないフロンタルに対して縮閉線及びその逆操作である伸開線を定義を与え、n 回縮閉線が定義されるための必要十分条件を与えました。また、応用として、伸開線の特異点の型と元の曲線の幾何学的性質との関係や、ルジャンドル曲線と円の一部の接触次数と、特異点や頂点の関係を与えました。縮閉線や伸開線の研究は古くから行われていますが、特異点を持つ曲線に対する縮閉線や伸開線に関して数学的に定義を与え定式化を行った研究は本研究（及びそれに繋がる一連の先行研究）が初であり、この論文をきっかけに様々な一般化（高次元化や他の空間での研究）が派性的になされることが期待できます。

（２）単純閉ルジャンドル曲線の凸性についての研究：ある条件の下、閉単純ルジャンドル曲線が凸であるための必要十分条件を、ルジャンドル曲線の曲率を用いて与えました。ユークリッド平面内の単純閉正則曲線にして、凸であるためには曲率の符号が一定であることが、古くから知られていました。しかし、曲線が特異点を持つ場合には、同様の判定方法を通用せず、研究が行われていませんでした。そこで、私達はルジャンドル曲線の曲率に着目し、単純閉フロンタルが凸であるためには、ルジャンドル曲線の曲率が一定である、という判定方法を与えました。この結果は非常に古典的な結果の美しい拡張ということのみならず、ルジャンドル曲線の曲率から曲線の大域的性質を導き出す初めての結果であるという点で、非常に大きな意義を持つ成果であると言えます。

（３）滑らかな曲線の像に対する枠付き曲線の存在条件の研究：ユークリッド平面内の滑らかな曲線の像が与えられた時に、それが枠付き曲線の像になるための条件を与えました。枠付き曲線の理論は非常に多くの曲線を扱うことのできる枠組みですが、枠付き曲線にならない曲線も多数あります。本研究では、（平面とは限らない）ユークリッド空間内の滑らかな曲線の像が与えられたときに、その像が枠付き曲線の底曲線として実現できるための条件を与えました。そこから導かれる系として、ユークリッド空間内の多角形は、全て枠付き曲線の枠組みで扱えることがわかります。また、枠付き曲線の像にならない曲線の具体例も構成しました。本成果により、枠付き曲線で扱える曲線の範囲が明らかになり、今後の応用への指針を与える結果であると言うことができます。

（４）枠付き曲面の基礎理論の構築：本研究では、特異点を持つ曲面を直接的かつ包括的に扱う理論として枠付き曲面の理論を導入し、その基礎理論の構築及び特異点論への応用を行いました。必ずしも正則とは限らない曲面とそれに沿う動標構の組を枠付き曲面と呼び、枠付き曲面の基本不変量を定義して存在性定理と一意性定理が成立つことを証明しました（逆に言うと、存在性定理と一意性定理が成立つような基本不変量を与えました）。また、その基本不変量から、曲率と呼ぶいくつかの量を構成し、曲率の値から曲面がフロントであるか判定する定理を導きました。この定理は曲面がフロントであることを容易に判定できるという点で、有用な定理です。また、枠付き曲面を、枠付き曲面に沿ったルジャンドル曲線の一係数族と捉えることにより、枠付き曲線の曲率とルジャンドル曲線の曲率を組み合わせた特異点の型の判定法を得ることに成功しました。この成果は、今後の特異点を持つ曲面の外在的研究の新たな枠組みを与えた非常に基礎的な研究成果であり、今後様々な応用が期待できる。

（５）枠付き曲線の一係数族としての曲面の研究：上述の枠付き曲面の研究から派生した研究として、枠付き曲線の一係数族としての曲面の研究を行いました。枠付き曲線の一係数族は、曲線の径数と、曲線の変形を与える径数の２つがあるので、曲面として捉えることもできます。この捉え方の利点は、枠付き曲面では扱えなかった「フロンタルでない曲面」（例えば、交差帽子）を扱う事が出来るということです。本研究では、まず枠付き曲線の一係数族と枠付き曲面の関係を、双方の曲率や不変量を用いて考察しました。また、枠付き曲線の一係数族として扱えない曲面の具体例など、多数の具体例を構成しました。更に、枠付き曲線の一係数族が余階数１の特異点を持つときに、フロンタルになるための必要十分条件を与えました。更に、余階数１の特異点は枠付き曲線の一係数族として捉えることができることを示しました。特に、重要な特異点のクラスであるカスプ片・ツバメの尾・カスプ的交差帽子・交差帽子については重点的に扱い、主結果の途中成果としてカスプ的交差帽子の標準形を与えました。この研究も、枠付き曲面の研究と同様に特異点を持つ曲面の外在的研究を押し進めるための足がかりとなり得るものであり、今後の発展が期待できる成果であると言えます。なお。本研究は学術雑誌には発表されていませんが、既に投稿済みであるものです。

（６）その他：以上の研究の他のものに関してはまだ論文に出来る域に達していませんが、曲線の発展方程式に関しては可香谷隆（九州大学）を九州産業大学数学セミナーに招聘し、ルジャンドル曲線の曲率と平均曲率流などに関する意見交換などを行い、今後の展開に期待が持てるものになりました。また、

曲線の位相幾何学的な研究として、フロントのアーノルド不変量とルジャンドル曲線の曲率の量子化との関係に関して、伊藤昇（東京大学）と意見交換を行いまたした。ルジャンドル結び目の不変量との関係も含めて一定の成果が出ており、もし完成すればルジャンドル曲線の曲率の位相幾何学的な応用例となり、インパクトの強い結果となることが期待できます。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
①Tomonori Fukunaga, Masatomo Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 採録決定済.
DOI: 10.1007/s00574-018-0090-z
査読有り

②Tomonori Fukunaga, Masatomo Takahashi, Existence conditions of framed curves for smooth curves, Journal of Geometry. Vol.108(2), 2017, 763-774.
DOI:10.1007/s00022-017-0371-5
査読有り

③Tomonori Fukunaga, Masatomo Takahashi, On convexity of sinple closed frontals, Kodai Mathematical Journal, Vol.39(2), 2016, 389-398.
DOI: 10.2996/kmj/1467830145
査読有り

④Tomonori Fukunaga, Masatomo Takahashi, Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane, Demonstratio Mathematica, Vol.48(2) 2015, 147-165.
DOI: 10.1515/dema-2015-0015
査読有り

〔学会発表〕（計９件）
① 福永 知則, 動標構を用いた特異点を持つ曲線及び曲面の研究，東京理科大学理工学部数学科談話会, 2017.

② 福永 知則，平面波面の微分幾何学と曲線の微分積分，九州産業大学物理教室セミナー，2017.

③ Fukunaga Tomonori, Framed surfaces in the Euclidean space, Geometric and Algebraic singularities theory, 2017

④ 福永 知則，枠付き曲面と特異点，可微分写像の特異点論とその応用，2016

⑤ Fukunaga Tomonori, Existence condition of framed curves for smooth curves, Germs be Ambitious, 2016

⑥ 福永 知則, C^{∞}曲線の像に対する枠付き曲線の存在条件について,
きりたんぽ数学セミナー, 2016

⑦ Fukunaga Tomonori, Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane, Geometric Singularity Theory, 2015

⑧ 福永 知則, ルジャンドル曲線の曲率と凸性の判定について，幾何学セミナー，2015

⑨ Fukunaga Tomonori, On convexity of simple closed frontals, Singularities in Generic Geometry and applications, 2015.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.kyusan-u.ac.jp/J/tfuku/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
福永　知則　（FUKUNAGA, Tomonori）
九州産業大学・理工学部・特任講師
研究者番号：20647606