様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　３０　年　　６　月　１８　日現在

機関番号：　５１４０１
研究種目：　若手研究(B)
研究期間：　2015～2017
課題番号：　１５Ｋ１７５４８

研究課題名（和文）特異点論に着目したローレンツ空間の曲面論

研究課題名（英文）Study on Surfaces of the Lorentzian from the viewpoint of singularity theory

研究代表者
加世堂　公希（Kasedo, Masaki）

秋田工業高等専門学校・その他部局等・准教授

研究者番号：４０７０５１１７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：５次元ド・ジッター空間内の余次元3の空間的曲面の研究を行った。空間的曲面に光的法方向をとり、対応する第二基本量が退化する接方向を漸近方向と定めた。ジェネリックな条件の下、階数２の集合は曲面上で正則曲線をなし、漸近方向から生成されるリフト曲面は階数２の集合上で特異点を持つことがわかった。また、bi-normal方向を定める方程式が重複度を持てば漸近方向を定める方程式も重複度を持つことを証明した。さらに漸近方向の重複度の情報を与える不変量を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied space-like surfaces of co-dimension three in de Sitter five space. An asymptotic direction is defined as a kernel direction of a second fundamental form of the space-like surface with respect to a light-like normal direction. A rank two set generically consists of a regular curve. A lifted surfaces has singularities on the rank two set.
  If an equation of bi-normal directions has multiple roots, then an equation of the asymptotic directions also has multiple roots. We obtained some invariants that give us some information of a multiplicity of the asymptotic directions.

研究分野：　微分幾何学

キーワード：　特異点論　微分幾何学　ローレンツ幾何学　曲面論　漸近方向　不変式　判別式

１．研究開始当初の背景

関数の極大点・極小点を可微分写像に拡張した概念である特異点は可微分写像のはめこみでも沈めこみでもない点として与えられる。写像の特異点は Whitney 氏によって注目され、その後多くの研究者らによって特異点の分類に関する研究が行われた。

その後、写像の特異点の分類の理論（特異点論）は微分幾何学へ応用されるようになった。３次元ユークリッド空間内にある曲面上の各点において法線方向をとる写像をガウス写像と呼ぶ。ガウス写像はさらに曲面から２次元球面への可微分写像として定義される。ガウス写像の特異点はガウス曲率 0 の放物点に対応する。さらに、ガウス写像の特異点はジェネリックに折り目型特異点とカスプ型特異点に分類される。（**図１**）

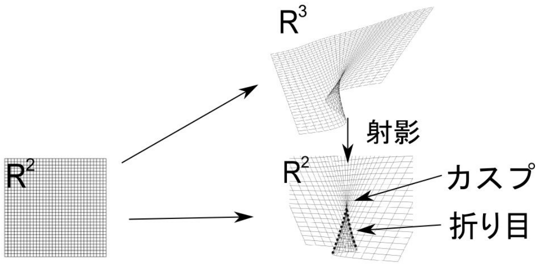

図１　折り目型特異点とカスプ型特異点

相対論的な時空を扱うミンコフスキー空間や、負の長さの次元を一般化したローレンツ空間では、計量によって定義されるベクトルの長さが正の値・負の値・0 になることがある。このときベクトルはそれぞれ空間的・時間的・光的という。さらに、曲面のすべての接ベクトル方向が空間的である場合、その曲面を空間的曲面と呼ぶ。曲面が空間的でない場合で接ベクトルに時間的方向と光的方向をもつ曲面を時間的曲面といい、接ベクトルに時間的方向を持たず退化した光的方向のみを持つ曲面を光的曲面という。光的曲面はその第一基本量が退化するため、ベクトルの正規化に問題が生じる。

空間的曲面は正定値の誘導計量をもち、ユークリッド空間内の曲面と類似した性質を持つ。これまでローレンツ空間内の空間的曲面は特異点論を用いて曲面の幾何学的な性質が調べられている。

空間的曲面の漸近線は第２基本計量が退化する方向（漸近方向）に沿って伸びる曲線として定義される。漸近線の概念は余次元が高い場合にも拡張されている。

研究代表者は Nabarro 氏、Ruas 氏らとともに 5 次元ド・ジッター空間内の余次元 3 の空間的曲面に定められる漸近方向の研究を行った。空間的曲面の光的法方向が定める第二基本量の代わりとなる３次の関数行列（以下、第二基本行列αと呼ぶ）を定めた。次に、擬正規直行枠や曲面のパラメータの取り方に依存しない漸近方向の定義を導入した。また、曲面上の漸近方向を定める方程式の解の重複度について調べ、第二基本行列αの係数を用いて漸近方向の分類を行った。

２．研究の目的

本研究課題は、特異点論をはじめとする代数的な手法を用いて、ローレンツ空間内の曲面論や部分多様体の研究を進めることを目的とした。

(1) ５次元ド・ジッター空間内の余次元 3 の空間的曲面上にある漸近線の局所的な分類を行う。

(2) 空間的・光的方向を接ベクトルに持つ光的曲面の局所的な幾何学的性質をローレンツ変換おける不変量を用いて明らかにする。

３．研究の方法

(1) 特異点論を用いて、５次元ド・ジッター空間内の余次元 3 の空間的曲面に定められる３次の関数行列αのジェネリックな性質を調べる。次に、ジェネリックな条件の仮定の下で、漸近線の局所的な性質を調べるため、漸近方向の方程式の局所的な解の挙動を調べる。

(2) 空間的・光的方向を接ベクトルに持つ光的曲面の局所的な幾何学的性質をローレンツ変換おける不変量を用いて明らかにする。

４．研究成果

(1) ５次元ド・ジッター空間内の余次元 3 の空間的曲面について以下のことが分かった。

① 曲面の光的法方向から定められる第二基本行列αについてジェネリックな性質を調べたところ、αの階数は２以上であることが分かった。この結果は Fuster 氏ら(Fuster et al, 2008)の 5 次元ユークリッド空間内の曲面に定められる３次の関数行列の階数のジェネリックな場合の結果と一致している。

② 文字 x,y を曲面のパラメータとする。漸近方向の方程式 F(x,y,dy/dx)=0 を満たす接方向 dy/dx を新たなパラメータ z として定めることによって得られる曲面 F(x,y,z)=0 をリフト曲面と呼ぶ。**図２**の下に描かれている曲面は３次元ユークリッド空間内の曲面とその漸近線を表し、**図２**の上に描かれている曲面はリフト曲面である。リフト部分の折り目の部分で 2 本ある漸近線が重なる。ただし、３次元ユークリッド空間内の曲面の場合、リフト曲面そのものはジェネリックに特異点を持たない。

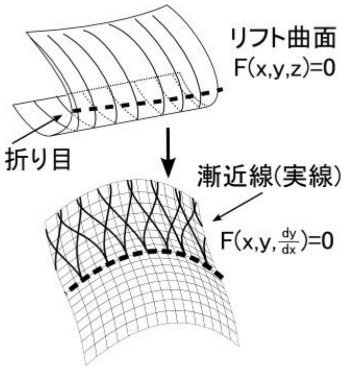

図２　ユークリッド空間内の曲面(下部)と
そのリフト曲面(上部)

一方、５次元ド・ジッター空間内の空間的曲面の漸近方向が重複するのは、「リフト曲面が折り目やカスプを持つ場合」と、「第二基本行列αの階数が２に下がった点でリフト曲面自体が特異点を持つ場合」がある。

これまで、「αの階数が３から２に下がった点のところで、リフト曲面自体がなぜ特異点を持つのか」という問いが存在していたが、Nabarro 氏、Ruas 氏らとの共同研究を通してその原因が漸近方向の方程式の形から説明されることが分かった。

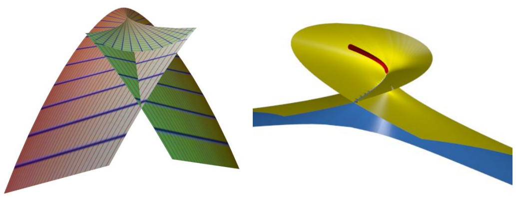

図３　スワローテイル型特異点（左図）
（右図は虚数解の重解を含めた
場合の図。）

③ 余次元が高い場合、曲面から一意的な法方向は定められないが、その法方向の族を考えることができる。５次元ド・ジッター空間内の空間的曲面は余次元が３であるため、法方向の族は通常２パラメータであり、光的法方向のみに限定してとると、１パラメータとなる。この光的法方向に関する曲面の第二基本量が退化する場合、その光的法方向を bi-normal 方向と呼ぶ。

曲面上の各点を固定して考えた場合、bi-normal 方向と漸近方向の満たす方程式はそれぞれ４次方程式となる。４次方程式の実解の分岐は、スワローテイル型特異点（図３）と呼ばれる形に対応する。このとき、４次方程式の不変式が解の判別や分岐に深く関わる。

bi-normal 方向を定める方程式の解が重複度を持つとき、漸近方向も重複度を持つことがいくつかの例から予想されていた。しかしそれを示すための bi-normal 方向と漸近方向の方程式の判別式の項の数が膨大であったため、これまでは直接計算による証明は無理であると考えられていた。そこで、４次方程式の不変式に着目しながら判別式の計算をすすめていったところ、漸近方向が重複度を持つ予想が手による直接計算によって示すことができた。

これにより、漸近方向の方程式が恒等的に 0 に等しくない場合に限り、漸近方向が重複度が持つ必要十分条件が「bi-normal 方向が重複度を持つ場合」と「第二基本行列αの階数が３から２に下がる場合」のいずれかであることが分かった。また、判別式の計算を行っていく過程で見つけた代数的な不変量が、bi-normal 方向や漸近方向の重複度と密接に関わることが分かり、それらの不変量の持つ幾何学的な意味を得ることができた。

さらに、bi-normal 方向が重複度を持てば漸近方向が重複度を持つ命題の証明を通じて、別次元のローレンツ空間内の空間的曲面の漸近方向に対する研究の足掛かりになる可能性があることが分かった。５次元ド・ジッター空間（５次元のローレンツ空間）以外の設定で曲面の第二基本量に関する不変量については今後の研究課題とする。

④ 漸近線に関する局所的な分類において、技術的な問題が発生したため、分類は残念ながら完了しなかった。しかし、リフト曲面が持つ特異点については、これまでによく知られている特異点が現れると予想されている。今後はリフト曲面が持つ特異点を調べることで、漸近線のジェネリックな分類への足掛かりとする。

(2) 3 次元ユークリッド空間内の曲面から誘導されるド・ジッター空間内の光的曲面について新たな不変量を得ることはできなかったが、光的曲面から不変量を構成する別の方策を Romero Fuster 氏, Sanabria Codesal 氏らと議論することができた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　2　件）

① Masaki Kasedou, Geometry on spacelike surfaces and hypersurfaces in de Sitter space, Geometric and Algebraic Singularity Theory, 2017 年

② Masaki Kasedou On spacelike surfaces and submanifolds in Lorentzian space, 微分幾何学と特異点論の応用，2017年

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等　なし

６．研究組織
(1)研究代表者
加世堂　公希（KASEDOU, Masaki）
秋田工業高等専門学校・一般教科自然科学系・准教授
研究者番号：４０７０５１１７

(2)研究分担者　　なし

(3)連携研究者　　なし

(4)研究協力者
Ana Claudia Nabarro,
University of San Paulo, ICMC

Maria Aparecida Soares Ruas
University of San Paulo, ICMC