様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７５５２

研究課題名（和文）単純型モノドロミー保存変形の量子化

研究課題名（英文）Quantization of simply-laced isomonodromy systems

研究代表者
山川　大亮（Yamakawa, Daisuke）

東京理科大学・理学部第一部数学科・講師

研究者番号：２０５９５８４７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：単純型モノドロミー保存変形方程式の時間パラメータの内，一部を固定した方程式を量子化する事に成功した。
Philip Boalch氏（パリ第11大学）との共同研究により、野性的指標多様体のポアソン構造を構成した。更に、コンパクトリーマン面上のフィルター付き有理型接続、及びフィルター付きストークス局所系を導入し、これらの間の圏同値を構成した。
リーマン球面上の不分岐有理型接続のモノドロミー保存変形について、相空間上の基本2次形式を具体的に記述することに成功した。更にこの結果と研究代表者の過去の研究成果を利用して、不分岐モノドロミー保存変形方程式の非自励ハミルトン系としての新しい記述を得た。

研究成果の概要（英文）：We partially quantized the simply-laced isomonodromy systems.
By joint work with Philip Boalch, we constructed the wild character varieties as algebraic Poisson varieties. Furthermore, we introduced the notions of filtered meromorphic connections on Riemann surfaces and filtered Stokes local systems, and established an equivalence between their categories.
We explicitly described the fundamental two-forms of the isomonodromic deformation equations for unramified meromorphic connections on the Riemann sphere. Furthermore, we use this result and some previous results to obtain a new description of the isomonodromic deformation equations as non-autonomous Hamiltonian systems.

研究分野：シンプレクティック幾何学

キーワード：有理型接続　モノドロミー保存変形　タウ関数　非自励ハミルトン系　量子化　野性的指標多様体　国際情報交換　フランス

１．研究開始当初の背景
有理関数を係数に持つ線型常微分方程式（＝有理型接続）が与えられると、その局所解の解析接続の様子を決定するものとして、Stokes係数･モノドロミーといったデータが定まる。これらのデータを保つような有理型接続の連続変形をモノドロミー保存変形と呼び、モノドロミー保存変形の下で接続の係数達が満たす非線型偏微分方程式をモノドロミー保存変形方程式と呼ぶ。

モノドロミー保存変形方程式の重要な例としてSchlesinger方程式がある。Schlesinger方程式は非自励ハミルトン系として記述することができ、これを正準量子化して得られる微分方程式は、数理物理学の分野において共形場理論の相関関数が満たす微分方程式として導入されたKnizhnik-Zamolodchikov方程式を与える。従って、Schlesinger方程式ではないモノドロミー保存変形方程式に関しても、その量子化を考えることによって共形場理論と関係する微分方程式が得られることが期待される。

モノドロミー保存変形方程式は、上記のように数理物理学と関係するだけでなく、特殊関数論や応用数学、微分幾何学等と関係しており現在活発な研究が行われている。本研究に直接関係するモノドロミー保存変形の量子化に関する先行研究としては、上記のSchlesinger方程式に関するものに加え、更にその一般化として、神保・三輪・毛織・佐藤方程式（以下JMMS方程式）の量子化が構成されている。またこれらとは別の方向の先行研究として、パンルヴェ方程式や能海・山田系（これらは全てモノドロミー保存変形方程式の例である）の量子化も構成されている。

２．研究の目的
本研究の目的は、Schlesinger方程式やJMMS方程式を含むようなより広いクラスのモノドロミー保存変形方程式を非自励ハミルトン系として記述し、その正準量子化を構成することである。より具体的な目標を以下に述べる。

（１）例えば時間変数が一つの場合の非自励ハミルトン系は、拡大相空間（相空間と時間変数の空間の直積）上でハミルトニアンが与える相空間方向のベクトル場（ハミルトンベクトル場）と時間方向の自明なベクトル場の和として記述される。一般のモノドロミー保存変形方程式の場合、拡大相空間にあたる空間が時間変数の空間の上の非自明なシンプレクティックファイバー束となっており、直積の形をしていない（JMMS方程式の場合は自然な直積構造を持っている）。そこで時間方向の自明なベクトル場に代わるものとして、ファイバー束の完備平坦シンプレクティック接続を取ることになる。接続の取り方には任意性があるため、どのようなものを取るかによって、モノドロミー保存変形方程式のハミルトン系としての記述は変化する。するとどのような取り方が正準量子化に適しているかということが問題になるが、これに関してはSchlesinger方程式の場合との整合性から、タウ関数と呼ばれる拡大相空間上の関数の対数微分がハミルトニアンとなるように取ることが最適であると期待している。そこで第一の目標として、不分岐有理型接続のモノドロミー保存変形に関し、タウ関数の対数微分に付随するハミルトンベクトル場達を計算し、それと無限小モノドロミー保存変形との差がファイバー束の完備平坦シンプレクティック接続を与えることを示したい。

（２）Schlesinger方程式やJMMS方程式を含むようなよりクラスの不分岐有理型接続のモノドロミー保存変形方程式として、Boalchによって導入された単純型モノドロミー保存変形方程式がある。この方程式の正準量子化を構成することを第2目標とする。単純型モノドロミー保存変形方程式に関しては、（１）で述べたファイバー束の完備平坦シンプレクティック接続の記述が比較的容易であり、研究期間内での量子化の構成も十分可能であると考えている。また、単純型モノドロミー保存変形方程式はディンキン図が単純グラフとなるようなワイル群の対称性を持つが、その背後には、1変数ワイル代数への自然な2次特殊線形群の作用が誘導する同方程式の対称性がある。この対称性の量子化への持ち上げがどのようなものになっているのかについても明らかにしたい。

３．研究の方法
次のような段階を踏んで、不分岐有理型接続のモノドロミー保存変形方程式を非自励ハミルトン系として記述する。

（１）形式的ローラン級数を成分に持つ正方行列を独立変数とする関数で共役不変なものを、有理型接続のモジュライ空間上の関数とみなしたとき、これをスペクトル保存量と呼ぶ。スペクトル保存量に関しては次のようなことが知られている。

① スペクトル保存量のハミルトンベクトル場はリー括弧の形で表され、その表示はスペクトル保存量の微分から具体的に求まる（Adler-Kostant-Symesの定理）。

② スペクトル保存量が行列の特性多項式の係数を用いて具体的に書かれていれば、Talalaevの量子スペクトル曲線法によって、スペクトル保存量をハミルトニアンとする自励正準方程式の量子化を構成することができる。

これらを利用するため、まずタウ関数の対数微分を有理型接続のスペクトル保存量として具体的に記述する。

（2）（1）で得られる結果から、特にタウ関数の対数微分のハミルトンベクトル場達が求まるため、その結果、無限小モノドロミー保存変形とハミルトンベクトル場の差が求まる。これが定める拡大相空間の接続に対し、次の条件を満たす拡大相空間上の閉 2 次微分形式Ωを求める。

① Ωの各ファイバーへの制限は、ファイバー上のシンプレクティック形式と一致する。

② 拡大相空間の接束の垂直部分束のΩに関する直交補束は、拡大相空間の接続に関する水平方向と一致する。

③ Ωを水平方向に制限すると 0 になる。

するとΩが閉形式であることから接続がファイバーのシンプレクティック構造を保つことが従い、Ωの水平方向への制限が 0 であることから接続が平坦であることが従う。JMMS 方程式のように拡大相空間が直積となっている場合、Ωはファイバーのシンプレクティック形式の自明な拡張によって与えられる。最後に接続が完備であることを、接続が定める微分方程式が求積可能であることを実際に確かめることで証明する。またこの際、微分方程式を可能な限り具体的に記述する。

（3）単純型モノドロミー保存変形方程式の量子化を構成する。まず拡大相空間の変形量子化を構成し、（1）で得たタウ関数の対数微分のスペクトル保存量としての記述に Talalaev の量子スペクトル曲線法を適用することで、ハミルトニアンの量子化を構成する。更に、（2）で得た完備平坦シンプレクティック接続に付随する微分作用素を変形量子化の上に持ち上げる。これによって、単純型モノドロミー保存変形方程式の量子化が得られることになる。最後に、1 変数 Weyl 代数の対称性の下で同値な単純型モノドロミー保存変形方程式達の量子化がどのように関係しているかを調べる。

なお本研究は、名古屋創氏（立教大学）による量子パンルヴェ方程式の研究、柳田伸太郎氏（京都大学）による AGT 予想の研究と密接に関連している。そこで彼らから研究に関して専門的知識の供与を受け、共同研究への発展も視野に入れながら活発に議論を行なう。また、大島利雄氏（城西大学）、原岡喜重氏（熊本大学）が年 2 回程のペースで開催しているアクセサリー・パラメーター研究会は、複素領域上の線型常微分方程式や超幾何関数の理論の最近の進展を概観することができる貴重な機会であるため、積極的に参加し参加者達と情報交換を行なっていく。

4．研究成果

（1）不分岐有理型接続のモノドロミー保存変形に関し、generic な場合にタウ関数の対数微分に付随するハミルトンベクトル場達と無限小モノドロミー保存変形の差が、拡大相空間を与えるファイバー束の完備平坦シンプレクティック接続を与えることを示した。得られた成果を論文にまとめ査読付きプロシーディングスにて発表した。これによって可積分系分野においてモノドロミー保存変形のハミルトン力学的描像の理解が更に進むと期待される。

（2）単純型モノドロミー保存変形方程式の時間パラメータは無限遠点における不確定類が持つパラメータと確定特異点の位置パラメータからなる。今回不確定類が持つパラメータの内、「最高次」のパラメータを固定した単純型モノドロミー保存変形方程式を量子化することに成功し、「アクセサリー・パラメーター研究会」にて成果報告を行った。

（3）Philip Boalch 氏（パリ第 11 大学）との共同研究により、有理型接続のモジュライ空間とリーマン・ヒルベルト対応で関係する野性的指標多様体のポアソン構造の構成を行った。これは特異点が不分岐な場合の同氏による結果を一般の場合へ拡張したものである。これによってモノドロミー保存変形の幾何学的描像の理解が更に進んだ。この成果について論文を執筆し、プレプリントとして発表した。更に、コンパクトリーマン面上のフィルター付き有理型接続、及びフィルター付きストークス局所系を導入し、これらの間の圏同値をリーマン・ヒルベルト・バーコフ対応を持ち上げることによって構成した。また安定フィルター付きストークス局所系をある関係式付き箙の表現と関係づけることで、そのモジュライ空間を準射影代数的シンプレクティック多様体として構成した。従ってフィルター付き有理型接続のモジュライ空間を構成し、得られた圏同値がモジュライ空間の間の複素解析的同型を与えることを示すことができれば、モノドロミー保存変形のパンルヴェ性を一般の状況で確認できる。この成果によってモノドロミー保存変形の幾何学的描像の理解が更に進んだ。

（4）リーマン球面上の有理型接続に対するフーリエ・ラプラス変換が、適切な仮定の下でモノドロミー保存変形方程式の対称性を誘導することを示した論文が雑誌に掲載された。この結果は本研究課題においても有効に活用されている。

（5）神戸大学にて行われた研究集会

「Conformal field theory, isomonodromy tau-functions and Painleve equations」にて、講演者の一人である Gabriele Rembado 氏（パリ第 11 大学）と本研究課題について議論し、氏のこれまでの研究成果と本研究のこれまでの成果をもとに、単純型モノドロミー保存変形の量子化について共同研究を行うことになった。それによって、本研究における課題の一つであった量子単純型モノドロミー保存変形方程式の時間変数の拡張について、解決のための新たなアプローチを発見した。今後も解決に向け引き続き共同研究を行っていく。

（6）不分岐有理型接続の（単純型とは限らない）モノドロミー保存変形について、相空間であるシンプレクティックファイバー束上の閉 2 次微分形式で、各ファイバー上への制限がシンプレクティック形式であり、かつその微分形式の核が無限小モノドロミー保存変形を与えるようなもの（基本 2 次形式）を具体的に構成することに成功した。更にこの結果と研究代表者の過去の研究成果を利用して、不分岐モノドロミー保存変形方程式の非自励ハミルトン系としての新しい記述を得ることに成功した。現在執筆中のこれらの結果は Frenkel と Ben-Zvi により構成されている Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard 方程式の量子化と関係があると期待しており、頂点作用素代数の理論を応用することで量子化への新たなアプローチを与えることになると考えている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① Daisuke Yamakawa、Tau functions and Hamiltonians of isomonodromic deformations、査読有、Josai Mathematical Monographs、Vol.10、2017、pp.139-160、doi/10.20566/13447777_10_139

② Daisuke Yamakawa、Fourier-Laplace Transform and Isomonodromic Deformations、査読有、Funkcialaj Ekvacioj-Serio Internacia、Vol.59、2016、pp.315-349、http://www.math.sci.kobe-u.ac.jp/~fe/xml/fe59-3-2.xml

〔学会発表〕（計 19 件）

① 山川 大亮、Hamiltonians for isomonodromic deformations、複素領域における関数方程式とその周辺、2018 年

② 山川 大亮、Filtered Riemann-Hilbert correspondence、紀尾井町数理セミナー、2018 年

③ 山川 大亮、Introduction to wild character varieties、Differential Geometry and Differential Equations:the influence of Mirror Symmetry and Physics、2017 年

④ 山川 大亮、Riemann-Hilbert-Birkhoff correspondence and isomonodromic deformations、理科大ワークショップ、2017 年

⑤ 山川 大亮、放物版リーマン・ヒルベルト・バーコフ対応とモノドロミー保存変形、複素微分方程式の楽しみ、2017 年

⑥ 山川 大亮、リーマン・ヒルベルト対応とモノドロミー保存変形、神楽坂幾何学セミナー、2017 年

⑦ 山川 大亮、Twisted wild character varieties、Irregular Connections, Character Varieties and Physics、2017 年

⑧ 山川 大亮、Twisted wild character varieties、Geometry, Analysis and Mathematical Physics、2017 年

⑨ 山川 大亮、放物版リーマン・ヒルベルト・バーコフ対応、JMM Workshop on Representation Theory and Differential Equations、2016 年

⑩ 山川 大亮、Twisted quasi-Hamiltonian geometry、東工大幾何セミナー、2016 年

⑪ 山川 大亮、Meromorphic connections and quivers、String-Math 2016 conference、2016 年

⑫ 山川 大亮、Twisted wild character varieties、神戸可積分系セミナー、2016 年

⑬ 山川 大亮、Twisted wild character varieties、Geometry of Wall Crossing, Deformation Quantization and Resurgent Analysis、2016 年

⑭ 山川 大亮、Twisted wild character varieties、日本数学会 2016 年度年会、2016 年

⑮ 山川 大亮、線形常微分方程式とルート系、第 13 回城崎新人セミナー、2016 年

⑯ 山川 大亮、モノドロミー保存変形のワイル群対称性と箙多様体、2015 年度表現論シンポジウム、2015 年

⑰ 山川 大亮、Application of quiver varieties to moduli spaces of connections on P^1、Kobe-Lyon Summer School in Mathematics 2015、2015 年

⑱ 山川 大亮、Quantized simply-laced isomonodromy systems、アクセサリー・パラメーター研究会、2015 年

⑲ 山川 大亮、有理型接続と箙多様体、Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2015、2015 年

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
山川　大亮（YAMAKAWA, Daisuke）
東京理科大学・理学部第一部数学科・講師
研究者番号：20595847

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
大島　利雄（OSHIMA, Toshio）
名古屋　創（NAGOYA, Hajime）
原岡　喜重（HARAOKA, Yoshishige）
柳田　伸太郎（YANAGIDA, Shintaro）
Philip Boalch
Gabriele Rembado