

令和元年6月21日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17553

研究課題名(和文)作用素環の分類理論と群や力学系への応用

研究課題名(英文)Classification of operator algebras and applications to dynamical systems

研究代表者

佐藤 康彦(Sato, Yasuhiko)

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：70581502

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：数学的に $xy \neq yx$ が起こり得るとき、考察の対象は非可換性を持つとよぶ。本研究では非可換性を無限次元の空間に表現する作用素環(C^* 環)の分類を研究し、核型 C^* 環の分類可能性の決定を目指した。研究成果として、私がこれまでの研究で与えた Toms-Winter 予想への解をトレースが唯一つという条件から、有限次元コンパクト空間という広い空間へ拡張する事ができた。また、分類可能である核型 C^* 環のうえに従順群による力学系を考え、この力学系の情報を含めた接合積 C^* 環が更に分類可能性を持つ事を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

作用素環の分類理論における重要未解決問題の1つに Toms-Winter予想とよばれる問題がある。本研究では、この予想の肯定解を「トレースの端点空間がコンパクト有限次元」という基礎的な場合に与えた。これまで日本の作用素環の研究が力学系に主眼を置いていたのに対し、この結果は分類理論そのものへ重要な応用を与えたといえる。また、この結果を更に逆輸入する形で、接合積とよばれる力学系の情報を含む作用素環の分類可能性を示した。現在 S. White, A. Tikuisis, W. Winter, G. Szabo, をはじめ多くの研究者がこの研究成果を元にした結果を与えている。

研究成果の概要(英文)：A mathematical object in which $xy \neq yx$ can happen is called non-commutative. In this research, we aim to classify operator algebras (C^* -algebras) which were introduced in order to represent non-commutative mathematics in infinite dimensional spaces. As a consequence of this study, we generalized my previous answer to Toms-Winter conjecture of the case of a unique tracial state, to the case of compact finite dimensional spaces much larger situation. Furthermore, investigating discrete countable amenable group actions on classifiable C^* -algebras, this research showed the classifiability of the crossed product C^* -algebras, which are known as C^* -algebras containing information on given dynamical systems.

研究分野：作用素環論

キーワード： C^* -環 分類可能性 Jiang-Su 環 核型次元 力学系 従順群

1. 研究開始当初の背景

C*環の分類理論は標語的に述べると「非可換な数学的対象である作用素環を、K-群とよばれる可換な群の情報で分類する」という事である。G. Elliott によって提唱されたこの分類計画は 2000 年を境に新たな局面を迎え、分類可能性の確立をめざす方向で研究が展開され始めた。本研究の開始当初は、この方向性で中心的な問題となる Toms- Winter 予想がほぼ定理として解決されはじめ、私の先行研究では「純無限」「トレースが唯一」といった基礎的な条件でこの問題が解決できていた。これらの部分的解決により、Toms- Winter 予想がほぼ肯定的であると信じられ、現在でも肯定性を示す方向で研究が推し進められている。この背景をうけ、本研究では残っていた「トレース条件」の一般化や、部分的に定理として確立している Toms- Winter 予想の力学系への応用を研究した。

2. 研究の目的

分類可能性の候補としてあげられた 3 つの正則性、「厳比較性」「Jiang-Su 環の吸収性」「核型次元の有限性」が核型作用素環に対しては同値という事が A. Toms, W. Winter らによる予想である。以前の私の研究ではこれらの同値性が「トレースが唯一」「純無限」などの場合に肯定的である事が示され、肯定解の大筋となるアイデアが得られていた。本研究ではこれらの技術を一般的な条件下へ拡張する事を目的に、特にトレース条件の拡張と核型次元の精密な計算を目的とした。

また作用素環の分類理論に付随する形で、その上の力学系を研究する事が分類理論の創始当初から行われていた。本研究では、上述の分類理論の進展を踏まえ、力学系における「分類可能性」の影響を把握する事を目的とした。また、分類理論で中心的な役割を果たす Jiang-Su 環とよばれる作用素環の力学系を調べ、この群作用の分類や分類可能性を明らかにする事を目的とした。

3. 研究の方法

(1)分類可能な C* 環を特徴付け、その中で主要な問題である Toms- Winter 予想の一般解を目指す。また、Jiang-Su 環の従順群作用に関する結果を、更に広い C* 環のクラスへ応用する。これらの目標を達成するためには、従順群の分類理論で主要な道具となる「K-群」などの不変量にたいする見識を深める必要がある。現在、この方向性ではアメリカの M. Dadarlat 氏、コペンハーゲン大学の M. Rordam 氏らが世界的な専門家として多くの研究結果を残している。特に分類可能性を与えるために必要な作用素環の同値条件を KK-理論の情報から得るという技術について M. Dadarlat - S. Eilers 氏らの研究が重要な鍵として考えられ、現在得られている多くの分類定理へ応用されている。私は 2015 年から M. Dadarlat 氏のいるアメリカ Purdue 大学へ 2 年間研究滞在し、セミナーや研究集会を通し彼の持つ技術を本研究へ応用する事を計画した。特に KK-群の情報を元に単純ではない作用素環の準同型の同値性については、克服すべき障害があった。私は過去の経験から彼との技術交換により分類可能性や力学系への応用という視点から、研究の進展が得られると考えた。

(2)従順群の力学系に対する技術をより広いクラスの分類可能性へ応用する。この目的のため、作用素環の群作用に関する専門家と情報交換を密にする必要があった。特に作用素環論の群作用の性質として Rohlin 性とよばれる性質が多くの研究者によって導入されている。特に C. N. Phillips, M. Rordam, I. Hirshberg, G. Szabo, J. Zacharias らが従順群の作用に対し多くの研究結果を示している。彼らの所属するアメリカ、デンマーク、ドイツの研究チームと研究集会などで直接議論を交わし、従順群の作用に関する情報交換を行った。

4. 研究成果

(1)これまでは、トレースを唯一持つ作用素環に関し Toms- Winter 予想が肯定的に解決できていた。本研究では共同研究者である N. Brown, J. Bosa, A. Tikuisis, S. White, W. Winter 氏らと共にこの研究を更に推し進め、トレースの条件を拡張する事に成功した。具体的には、トレースを唯一と仮定していた結果を、「トレース空間の端点全体が有限次元コンパクト」という条件へ拡張した。つまりこの研究により、Toms- Winter 予想はトレース空間に依存しない問題である事が裏付けられる。更にこの共同研究では、有限次元の仮定を取り払い、Toms-Winter 予想で考える 3 つの条件のうち 2 つが同値である事を示した。

(2)分類可能性の同値条件の1つに「核型次元」とよばれる不変量が E. Kirchberg, W. Winter, J. Zacharias 氏らによって導入されていた。これまでに松井宏樹氏との共同研究では単純, 可分, 核型, 純無限を仮定すると核型次元が3以下である事が解っていた。分類理論において核型次元が有限である事は分類可能である事を意味し、Toms-Winter 予想では分類可能性と核型次元の有限性が同値と予想されていた。この量は雑把に述べると核型次元が低いほど、分類し易い作用素環であるといえる。本研究ではこの核型次元を更に正確に計算し、純無限の場合は1であると決定できた。Toms-Winter 予想では有限という予想であったのに対し、この研究では普遍的な値が具体的に求まり予想以上の事実が示せたといえる。また、この数字は最適なものである事が知られている。

(3)離散従順群の核型 C^* 環への作用を研究し、そこから自然に得られる作用素環が分類可能性を満たす事を示した。

作用素環の上に群の作用が与えられると、そこから自然に「接合積」とよばれる作用素環が新たに作られる。この接合積は群の作用の情報を内包すると考えられ、力学系の分類や作用素環の構成に幅広く応用されている。本研究ではこの接合積という操作が分類可能条件である「Jiang-Su 環の吸収性」を保存する事を証明した。既存の研究では、この種の分類可能性を得るために力学系に強い外部性を課す必要があり、分類可能性が群の作用の仕方に依存する事が通説となっていた。実際、多くの研究者が Rohlin 性やその類似条件を仮定し、Jiang-Su 環の吸収性やそれと同値な核型次元の有限性を示している。本研究の代表者も以前は、初等的従順群の作用を研究し、強い外部作用の条件下で接合積の分類可能性を得ていた。これらの先行結果と比較し、本研究では力学系にほぼ条件を仮定する事なく、Jiang-Su 環の吸収性を得る事に成功した。

この定理から得られる一つの成果として、外部的な従順群作用の接合積が基本的な条件下では核型次元1以下である事を示した。既存の研究では、具体的な構成方法から Rohlin 次元などの力学系の情報と、もとの環の核型次元を合わせて接合積の核型次元を計算する方法が考えられていた。この手法は沢山の群作用で応用され、多くの例で核型次元が計算されている。一方で、この方法は与えられた群作用の条件に強く依存し、核型次元の最小値が計算できない問題点があった。核型次元1は有限次元環で近似できる環を除いて最小の値であり、1以下は最適な数である。本研究では直接この核型次元の最小値を与え、群作用によらない統一的な計算手法を与えたといえる。

(4)準同型の2正定値性と直交性を研究し、分解階数の条件を2正定値性で特徴づけた。

作用素環論では準同型を扱う際、「任意の自然数 n に対する n -正定値性」という完全正定値性を仮定し、議論を行う方法が定着している。議論の中心となる核型、核型次元、分解階数などはこの完全正定値という条件で特徴づけられる。本研究では、新たな試みとして完全正定値性を2正定値性に弱め分類理論への影響を調べた。結論として、分解階数や核型次元などの概念は完全正定値性を2正定値性に弱めた条件でも元の定義と同値である事が解り、より弱い条件からの特徴付けを得る事ができた。また、一般の場合に近似的に直交性を満たす2正定値写像の特徴付けを行った。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4件)

J. Bosa, N. Brown, Y. Sato, A. Tikuisis, S. White, W. Winter, Covering Dimension of C^* -Algebras and 2-Coloured Classification, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 査読有、257、2019、p. 1~97. <https://doi.org/10.1090/memo/1233>

Y. Sato, Actions of amenable groups and crossed products of Z -absorbing C^* -algebras, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 査読有、80、2019、p. 189~210.

Y. Sato, 2-positive maps of almost order zero and decomposition rank, to appear in arXiv:1906. 2019.

佐藤康彦, C^* 環の分類理論の進展、*数学(日本数学会)* 査読有、70、2018、p. 44~62. *Mathematical Society*, 査読有、257、2019、p. 1~97. <https://doi.org/10.1090/memo/1233>

[学会発表](計 27件)

“A calculation of nuclear dimension and certain ranks of amenability” Purdue Operator algebras seminar, Purdue University (USA), Mar.28 2019

“Actions of amenable groups and absorption of the Jiang-Su algebra” RIMS, Kyoto University, Sep.4, 2018.

“Actions of amenable groups and absorption of the Jiang-Su algebra” IWOTA, East China Normal University (China), Jul.19. 2018.

“Actions of amenable groups and absorption of the Jiang-Su algebra” 14th KOAS at Busan Bexco (Korea), Jun.21, 2018.

“On the approximation theorem by Weierstrass” Galois Fest. in Kyoto University, Jun. 15, 2018.

“Projections associated with quasidiagonality” Annual Meeting on Operator Theory/ Operator Algebras, Ritsumeikan University (Japan), Nov. 18, 2017.

“Projections associated with quasidiagonality” MSJ Autumn Meeting 2017, Yamagata University (Japan), Sep. 13, 2017.

“Projections associated with quasidiagonality” Future Targets in the Classification Program for Amenable C^* -Algebras, BIRA Banff (Canada), Sep. 4, 2017.

“Projections associated with quasidiagonality” Functional Analysis Seminar, Nara-Jyoshi-University, Aug. 28-30, 2017

“Automorphisms with the Rohlin property on nuclear C^* -algebras” The third summer school on Operator Algebras, Hebei Normal University, China, Jun. 26, 2017.

“Actions of Amenable Groups and Absorption of the Jiang-Su Algebra”, Special Week on Operator Algebras, Jun. 6, 2017.

“Actions of amenable groups and absorption of the Jiang-Su algebra”, Kyoto Operator Algebra Seminar, May. 16, 2017.

“Bogoliubov actions of amenable groups on the CAR algebra”, Operator algebra Seminar Purdue University, U.S, Jan. 26, 2017.

“Strict comparison associated with pure states of nuclear C^* -algebras”, Linear Analysis Seminar, Texas A and M University, U.S, Nov. 11, 2016.

“Automorphisms with the Rohlin property on nuclear C^* -algebras”, West Coast Operator Algebra Seminars, University of Wyoming (US), Oct. 16, 2016.

“Automorphisms with the Rohlin property on nuclear C^* -algebras”, East Coast Operator Algebra Seminars, Loyola University Chicago (US), Oct. 2, 2016.

“Automorphisms with the Rohlin property on nuclear C^* -algebras”, MSJ-SI Symposium, Tohoku University (Japan), Aug. 12, 2016.

“Tracial Approximation of Nuclear C^* -algebras and their Dynamical Systems”, Hebei University (China), July. 5, 2016.

“Automorphisms of Nuclear C^* -algebras”, Operator Algebras May Program, East China Normal University (China), May. 9, 2016.

“Automorphisms of Nuclear C^* -algebras”, Workshop Classification and dynamical system I: C^* -algebras, Institut Mittag-Leffler (Sweden), Feb. 22, 2016.

²¹ “Automorphisms of Nuclear C^* -algebras”, Wabash Seminar, Wabash College, Nov. 14, 2015.

²² “Automorphisms of Nuclear C^* -algebras”, Noncommutative Geometry Seminar, Pennsylvania State University (US), Oct. 29-30, 2015.

²³ “Elementary amenable groups and Quasidiagonality”, Workshop on C^* -algebras : Geometry and Actions, University of Munster (Germany), Jul. 15, 2015.

²⁴ “Classification theory and order zero maps”, The Structure of C^* -algebras, University of Wyoming (US), Jul. 01-04, 2015.

²⁵ “Classification of certain order zero c.p. maps by traces”, International conference on C^* -algebras and Dynamical systems, Hebei Normal University, Jun. 30, 2015.

²⁶ “Strict comparison and absorption of the Jiang-Su algebra”, Great Plains Operator Theory Symposium, Purdue University (US), May. 28, 2015.

²⁷ “Classification of certain order zero c.p. maps by traces”, Workshop on C^* -algebras: Structure and Classification, University of Munster (Germany), Apr. 24, 2015.

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：佐藤 康彦 ローマ字氏名：(SATO, Yasuhiko) 所属研究機関名：京都大学
部局名：大学院理学研究科 職名：助教 研究者番号(8桁)：70581502

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。