様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１７５５４

研究課題名（和文）特異的幾何学構造に由来する微分作用素とその確率論的対応物に対する数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of differential operators derived from singular geometric structures and their probabilistic counterparts

研究代表者
梶野　直孝（KAJINO, Naotaka）

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：９０７００３５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題の中心的な研究成果は，アポロニウスの詰め込みをはじめとする，複素一次分数変換のなす離散群の最小不変閉集合として与えられる円詰込フラクタルの幾つかの重要な具体例に対し，幾何的に自然なエネルギー形式および（熱方程式・波動方程式の定式化の基礎となる空間変数についての微分作用素である）ラプラシアンの構成法とその具体的表示を見出し，ラプラシアンの固有値の漸近挙動を証明したことである．
また確率論において近年盛んに研究されているLiouville Brown運動というランダム幾何構造中の確率過程の確率密度関数の評価を得ることを目標に共同研究を行い，上からの評価の十分条件を与える一般論を構築した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
与えられたフラクタルの上に幾何的に自然なラプラシアンを構成する問題は，30年の歴史を持つフラクタル上の解析学の最も基本的な問題であるにも拘らず，一部の理想的な自己相似性を有するフラクタル以外に対してはほとんど研究されてこなかった．アポロニウスの詰め込みの場合を端緒として一般の円詰込フラクタルに対して幾何的に自然なLaplacianの構成法を見出せたことは大きな進展であり，今後はより広範なフラクタルへの拡張が期待される．
Liouville Brown運動の確率密度関数の評価を得る研究は，既存の研究では追求されていない詳細な劣ガウス型評価の証明を目指すものであり，世界的に見てもその独自性は高い．

研究成果の概要（英文）：As the main results of this research project, the principal investigator has studied certain important examples of circle packing fractals, such as the Apollonian gasket, realized as the minimum closed invariant sets of discrete groups of complex linear fractional transformations. Specifically, he has constructed a geometrically natural energy form and a Laplacian (a differential operator in space variable which is central to the formulation of heat and wave equations) on those fractals, found out an explicit expression of them and proved an asymptotic formula for the eigenvalues of this Laplacian.
He has also conducted joint research on the Liouville Brownian motion (LBM), which is a stochastic process running in a certain random geometry and has been extensively studied recently in probability theory, and a sufficient condition for estimates from above has been obtained in a general framework as an intermediate step for proving estimates of the transition density function of the LBM.

研究分野：フラクタルおよび測度距離空間上の解析学

キーワード：フラクタル解析　ラプラシアン　固有値漸近挙動　アポロニウスの詰め込み　円詰込フラクタル　クライン群　リウヴィルブラウン運動　劣ガウス型熱核評価

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1)基本的な物理現象としての熱や波動の伝播を表す微分方程式である熱方程式や波動方程式においては，空間変数についての微分に Laplacian と呼ばれる微分作用素が自然に現れることがよく知られている．滑らかな曲面（や，その一般化である Riemann 多様体）においては Laplacian は具体的な偏微分作用素として与えられるが，自己相似フラクタルにおいては 1 点のどんなに小さな近傍も全空間と同等の複雑さを有するため素朴な微分の概念が機能せず，Laplacian をどう定義すべきかは非自明な問題である．1980 年代後半～90 年代前半にかけての著しい研究の進展により，典型的な自己相似フラクタルに対しては Laplacian を数学的に厳密に定義することができ，さらにその固有値（フラクタルを振動膜とみなしたときの固有振動数）や熱方程式の解の挙動は滑らかな Riemann 多様体の場合と質的に異なることが明らかにされた．

(2)同様の異質な挙動は Euclid 空間（や滑らかな Riemann 多様体）においても，通常の Laplacian の定義に現れる勾配ベクトル場の発散を（標準的な体積測度と）特異な測度に関する発散に置き換えることで得られる特異微分作用素に対しては成り立つ場合があることが，2000 年以降の研究で明らかにされてきていた．例えば木上(2004, 2009)はこの特異微分作用素を Euclid 空間内の閉区間上の自己相似測度の場合に考察し, 対応する熱方程式の解が自己相似フラクタルの場合に類似の挙動を見せることを示した．また確率論においては Gauss 自由場と呼ばれる, 2 次元曲面上の Green 関数（Laplacian の逆作用素の積分核）を共分散とする Gauss 確率場の研究が 2010 年代に入って以降急速に進展しており，中でも「Gauss 自由場の指数関数を密度とする」測度として定義されるランダムな特異測度である Liouville 測度の定める幾何構造の研究は中心的な位置を占めている．この Liouville 測度から定まる特異微分作用素に対しては，対応する拡散過程（Liouville Brown 運動）が Garban-Rhodes-Vargas (2016)で構成され熱方程式の解の（粗い）評価は Maillard-Rhodes-Vargas-Zeitouni (2016)や Andres-梶野(2016)で得られていたが，自己相似フラクタルの場合のような熱方程式の解の挙動の詳細な解析はなされていなかった．

(3)上記の通りフラクタル上の Laplacian や曲面上の特異微分作用素は Riemann 多様体上の Laplacian とは異質の挙動を示すのが普通である．しかしその一方で楠岡 (1989, 1993)，木上(1993, 2008)，梶野 (2012, 2013)らの研究により，Sierpinski gasket というフラクタルに対しては平面への「調和な埋め込み」を考えることで Riemann 多様体の構造の類似物である「測度論的 Riemann 構造」を導入でき，このとき対応する Laplacian や熱方程式が Riemann 多様体の場合と同様の解析的性質を持つようになることが知られている．この結果はフラクタルという「特異な」空間においても「多様体的な」解析学が展開できる可能性を示唆する興味深いものであるが，その研究手法は Sierpinski gasket の特殊性に大きく依存しており，他のフラクタルへの一般化は容易でない．

(4)Sierpinski gasket と位相同形な，古くからよく知られているフラクタルとして，平面内の円弧からなる「3 角形」（の内部と周の和集合）から内接円の内部を取り除く操作を無限に繰り返すことで得られるアポロニウスの詰め込み(Apollonian gasket)がある．アポロニウスの詰め込みは, Sierpinski gasket 上のあるエネルギー形式（Dirichlet 形式；上述の測度論的 Riemann 構造を与えるものとは全く異なる）に関する調和埋め込みとみなせることが Teplyaev (2004)により示されており，従ってこの埋め込みにより自然な測度論的 Riemann 構造を導入することができる．筆者は本研究課題の開始当初までに，空間の離散近似の段階ではこのエネルギー形式は詰め込みの各部分を構成する円の半径（の逆数）のごく簡単な有理式を抵抗値に持つ重み付きグラフとして与えられること，このエネルギー形式の完備性と位相的正則性，および Laplacian の最小固有値が詰め込みの外接円半径の逆数の 2 乗と比較可能であることの証明に成功していた．

(5)アポロニウスの詰め込みはある Klein 群（3 次元双曲空間の向きを保つ等長変換のなす群の離散部分群）の極限集合になっているため，この例はフラクタル上の測度論的 Riemann 構造の理論と Klein 群論との接点であり，より一般の Klein 群の極限集合に対しても類似の解析学が展開できる可能性を示唆していて重要である．またアポロニウスの詰め込み（をはじめとする Klein 群の極限集合）に対しては近年 Hee Oh らにより極限集合を構成する円の半径の分布の漸近挙動解析をはじめとして Klein 群論や力学系の観点から極めて深い研究が行われていた．

２．研究の目的

(1)本研究課題の目的は，上記のような特異な幾何構造に由来する特異微分作用素，およびそれらを生成作用素に持つ拡散過程について，より詳細な解析を行うことである．具体的には，近年の研究の進展により解決の可能性が現実的となってきた，または現状では既知の結果が僅かしかない，自己相似フラクタル上の熱核（拡散過程の推移確率密度）のより詳細な短時間漸近挙動，測度論的 Riemann 構造に対する Laplacian の固有値の漸近挙動，波動方程式の解析，流体力学極限による偏微分方程式の基礎付け，Liouville Brown 運動の解析について研究を行う．（ただしこれらに限らず関連する問題についても解決の可能性を積極的に探る．）

(2)「自己相似フラクタル上の熱核のより詳細な短時間漸近挙動」に関しては，既存の多くの研究が目標としている熱核の上下からの評価だけからでは必ずしも明らかではない，熱核の時刻変数が 0 に近づくときのより詳細な漸近挙動の解明を目標に研究を行う．

(3)「測度論的 Riemann 構造に対する Laplacian の固有値の漸近挙動」に関しては，上記のアポロニウスの詰め込みの上のエネルギー形式から定まる Laplacian に対し，その固有値の漸近挙動の解明，および関連する話題として対応する熱核の連続性や（可能な限りよい）評価を得ることを目標に研究を行う．さらにより一般の Klein 群の極限集合に対しても類似の解析学が展開できないか検討し，可能な限り広範な極限集合に対して同様の解析を行うことを目指す．（なおこのアポロニウスの詰め込みについては，本研究課題への応募時点では実現可能性が薄いと考え研究計画調書では言及しなかったが，本研究課題の開始当初までに具体的な計算の見通しが立ったことや，数学の他分野との密接な関連が見込まれるなど発展性や重要性が極めて高いと思われることから，本研究課題の一部として研究を実施することにした．特異的幾何学構造に由来する微分作用素の研究という本研究課題の主旨に合致していることには疑問の余地はないと考えている．）

(4)「波動方程式の解析」に関しては，上述のような特異微分作用素を空間微分の項に持つ波動方程式について，その解に対する定量評価を得ることを目標として研究を行う．

(5)「流体力学極限による偏微分方程式の基礎付け」に関しては，Euclid 空間上で数多くなされている，物理現象を記述する様々な偏微分方程式を多粒子系の時間発展のスケール極限（流体力学極限）として基礎付ける研究を，上述のような特異微分作用素を含む偏微分方程式に対しても確立することを目標とする．

(6)「Liouville Brown 運動の解析」に関しては，自己相似フラクタル上の Laplacian の場合によく知られている「劣 Gauss 型」と呼ばれる熱核評価に近い型の熱核評価が Liouville Brown 運動に対して成り立つことが予想されているものの，既存の研究ではこの予想からは程遠い熱核評価しか得られていない．そこでこの場合に予想される型の熱核評価を証明することを目標に研究を行う．

３．研究の方法

(1)アポロニウスの詰め込みについては，Laplacian の固有値の漸近挙動を，筆者が Sierpinski gasket 上の測度論的 Riemann 構造に対する未出版の研究で用いた，Kesten (1974)による Markov 連鎖の汎関数に対する更新定理を適用する議論を当てはめることで証明できないか試みる．また木上(2001)の教科書にある区分的に調和な関数に対する近似 Green 関数の単調増大極限として Green 関数を与える手法，および熱核の対角部分の上下評価を得るための標準的な手法を適用することで Laplacian の固有関数の連続性および熱核の連続性と上下評価を証明できないか試みる．さらにより一般の Klein 群の極限集合に対しても，アポロニウスの詰め込みの上のエネルギー形式の構成方法を再度詳細に検討することにより類似の方法で自然な Laplacian を定義することを試み，それに成功した場合は引き続き Laplacian の固有値・固有関数や熱核の詳細な解析を行う．

(2)Liouville Brown 運動の解析については，この話題に関する筆者の従前からの共同研究者であるイギリス・Cambridge 大学の Sebastian Andres 氏，および Liouville 測度の定める幾何構造の研究の第一人者である同大学の Jason P. Miller 氏を訪問あるいは招聘して意見交換を行い，3 者の知見の統合により予想される型の熱核評価の証明を目指す．具体的には，予想される型の熱核評価の成立のための十分条件を与える定理を熱核評価に関する既存の研究を精査・拡張することにより証明し，さらにその十分条件を Liouville 測度から定まる特異微分作用素に対して示すことを基本方針とする．

(3)「自己相似フラクタル上の熱核のより詳細な短時間漸近挙動」については，熱核の対角部分の複数スケールに渡る平均が中心極限定理を満たすことが Kuelbs-Philipp (1980)による Banach 空間値確率変数列に対する概不変原理から従うことが予想されるので，この概不変原理が適用できることの証明を目指す．

(4)「波動方程式の解析」「流体力学極限による偏微分方程式の基礎付け」に関しても，関連する既存の研究を精査するとともに国内外の研究集会に出席して情報収集を行い，研究の進展に向けて努力する．

４．研究成果

(1)本研究課題の中心的な研究成果は，アポロニウスの詰め込みをはじめとする，Klein 群の極限集合として与えられる円詰込フラクタルの幾つかの重要な具体例に対し，幾何的に自然なエネルギー形式および Laplacian の構成法を見出し Laplacian の固有値の漸近挙動を証明したことである．（なお当該結果を述べた論文は執筆時間の確保に苦慮しており，残念ながら未完成である．）

①まずアポロニウスの詰め込みに対し，Kesten (1974)による Markov 連鎖の汎関数に対する更新定理を適用することにより，Laplacian の固有値の漸近挙動が滑らかな Riemann 多様体の場合と同様の形で成立し，しかし極限にはアポロニウスの詰め込みの（非整数次元の）Hausdorff 測度の定数倍が現れる（そしてこの測度は Laplacian の定義に現れる解析的な意味での体積測度とは特異である）ことを証明した．続いてこの場合にエネルギー形式および解析的な意味での体積測度が，アポロニウスの詰め込みを構成する各円弧上の通常の（1 次元的な）エネルギー形式および長さ測度に円弧の半径を乗じたものの和として具体的に表示できること，およびこのエネルギー形式が「各座標関数が（最端 3 頂点の補集合上で）調和関数になる」という条

件により一意的に定まることを証明した．その後さらに上述の近似 Green 関数の単調増大極限として Green 関数を与える手法と熱核の対角部分の評価を導く標準的な手法により, Laplacian の固有関数と熱核の連続性，および熱核の対角部分が解析的な意味での体積測度に関してほとんど全ての点において１次元的な上下評価を満たすことを証明した．
②アポロニウスの詰め込みに対して得られた上記のエネルギー形式と体積測度の具体的表示は一般の円詰込フラクタルに対しても意味を成し，エネルギー形式および Laplacian の（１つの）定義を与える．さらに簡単な計算によりこのエネルギー形式の下で各座標関数が（自然な境界集合の補集合上で）調和関数になることも分かり，その意味でこのエネルギー形式および Laplacian はやはり幾何的に自然である．そこでアポロニウスの詰め込みに対する上述の結果を，より広範な円詰込フラクタル上のこの定義で与えられる Laplacian の場合へと拡張するべく研究を行い，「1 点穴空きトーラスのタイヒミュラー空間の Maskit 境界上の両側カスプ群」として知られているある具体的な Klein 群の族の極限集合として現れる円詰込フラクタルに対して，上記と同様の Laplacian の固有値の漸近挙動を証明した．なおこの円詰込フラクタルは有限分岐性，すなわち「細胞同士が有限集合でしか交わらないような自然な細胞分割の列を有する」という性質を持つが，一方で Sierpinski carpet と位相同型な（従って有限分岐性を持たない）円詰込フラクタルを極限集合に持つ Klein 群の重要な具体例も知られており，Laplacian の固有値の漸近挙動の証明に必要となる幾何的性質についての手掛かりも得られている．（以降の研究は後続の科研費研究課題へと引き継いでいる．）
③Laplacian の固有値の漸近挙動が上記の形で成り立つという現象は他には Sierpinski gasket 上の測度論的 Riemann 構造の場合にしか知られておらず，上記の研究成果は同様の現象を示すフラクタル上の Laplacian の例の新たな一群を提示しており重要である．
(2)Liouville Brown 運動の解析については，イギリス・Cambridge 大学の Sebastian Andres 氏および Jason P. Miller 氏との共同研究により，まず（劣 Gauss 型に類似の型の）熱核評価の成立のための十分条件を与える一般的な定理を，上からの熱核評価に関して証明した．さらにこの十分条件を，幾何構造の理解が最も進んでいる，Gauss 自由場の空間相関の強さを表す物理パラメータがある特定の値の場合の Liouville Brown 運動に対しては証明することが可能であるとの感触を得た．
(3)他の主たる研究課題として考えていた「自己相似フラクタル上の熱核のより詳細な短時間漸近挙動」「波動方程式の解析」「流体力学極限による偏微分方程式の基礎付け」については，はっきりとした研究成果を得ることが残念ながらできなかった．これらのうち１つ目の課題については Kuelbs-Philipp (1980)による Banach 空間値確率変数列に対する概不変原理を適用すること自体は可能らしいとの感触は得られたものの，中心極限定理に現れる分散が 0 に退化する可能性を排除することが難しく，熱核の対角部分が分散が正の正規分布の形の振動を有する，という当初目標としていた主張が証明できる見込みは結局立てられなかった．

５．主な発表論文等
〔学会発表〕（計 13 件）
①N. Kajino, ``Weyl's eigenvalue asymptotics for the Laplacian on circle packing limit sets of certain Kleinian groups'', 2017 年 9 月 22 日, International Workshop: ``Potential Analysis and its Related Fields 2017'', Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo, Japan, Septemer 21-22, 2017.
②N. Kajino, ``Weyl's eigenvalue asymptotics for the Laplacian on circle packing limit sets of certain Kleinian groups'', 2017 年 9 月 4 日, International Conference: ``Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017'', Technische Universitaet Kaiserslautern, Kaiserslautern, Germany, September 4-8, 2017.
③N. Kajino, ``Weyl's eigenvalue asymptotics for the Laplacian on circle packing limit sets of certain Kleinian groups'', 2017 年 8 月 10 日, RIMS camp-style seminar: ``Large scale properties of partial differential equations with random coefficients'', Crefeel Koto, Shiga, Japan, August 7-11, 2017.
④N. Kajino, ``Weyl's eigenvalue asymptotics for the Laplacian on the Apollonian gasket and on circle packing limit sets of certain Kleinian groups'', 2017 年 6 月 16 日, International Conference: ``6th Cornell Conference on Analysis, Probability, and Mathematical Physics on Fractals'', Cornell University, Ithaca, NY, USA, June 13-17, 2017.
⑤N. Kajino, ``The Laplacian on some finitely ramified self-conformal circle packing fractals and Weyl's asymptotics for its eigenvalues'', 2017 年 5 月 12 日, International Workshop: ``One day workshop on stochastic differential geometry'', 東北大学理学研究科, 2017 年 5 月 12 日.
⑥N. Kajino, ``Weyl's eigenvalue asymptotics for the Laplacian on the Apollonian gasket and on circle packing limit sets of certain Kleinian groups'', 2017 年 3 月 23 日, International Workshop: ``Dirichlet forms and their geometry'', 東北大学情報科学研究科, 2017 年 3 月 18～23 日.
⑦N. Kajino, ``The Laplacian on the Apollonian gasket and its Weyl type eigenvalue

asymptotics'', 2016年7月15日, International Workshop: ``Heat Kernels and Analysis on Manifolds and Fractals'', University of Bielefeld, Bielefeld, Germany, July 11-16, 2016.
⑧N. Kajino, ``The Laplacian on the Apollonian gasket and its Weyl type eigenvalue asymptotics'', 2016年6月14日, International Conference: ``The 8th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications'', Beijing Institute of Technology, Beijing, China, June 13-17, 2016.
⑨N. Kajino, ``The Laplacian on the Apollonian gasket and its Weyl type eigenvalue asymptotics'', 2016年5月22日, International Workshop: ``Dynamics, Ergodic Theory and Fractals'', 大阪大学豊中キャンパス, 2016年5月21〜22日.
⑩N. Kajino, ``The Laplacian on the Apollonian gasket and its Weyl type eigenvalue asymptotics'', 2016年3月22日, International Workshop: ``The 1st Hong Kong/Kyoto Workshop on Fractal Geometry and Related Areas'', Institute for Advanced Study, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, March 21-22, 2016.
⑪N. Kajino, ``The Laplacian on the Apollonian gasket and its Weyl type eigenvalue asymptotics'', 2016年3月7日, International Workshop: ``2016 Spring Probability Workshop'', Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan, March 7-9, 2016.
⑫N. Kajino, ``The Laplacian on the Apollonian gasket and its Weyl type eigenvalue asymptotics'', 2015年11月9日, 確率論と幾何学, 東京工業大学大岡山キャンパス, 2015年11月9〜11日.
⑬N. Kajino, ``The Laplacian on the Apollonian gasket and its Weyl type eigenvalue asymptotics'', 2015年9月10日, International Conference: ``Stochastic Analysis'', 京都大学理学研究科, 2015年9月7〜11日.

〔その他〕
研究代表者のホームページ（論文のプレプリントがダウンロードできる）：
http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/nkajino/

６．研究組織