

令和元年6月20日現在

機関番号：32619

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17556

研究課題名(和文) 多変数超幾何系に対する完全WKB解析

研究課題名(英文) Exact WKB analysis for hypergeometric systems

研究代表者

廣瀬 三平 (Hirose, Sampei)

芝浦工業大学・デザイン工学部・助教

研究者番号：20743230

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：これまで常微分方程式に対して主に展開されてきた完全WKB解析を完全積分可能系である多変数超幾何系に対して考察を行った。特に、多変数超幾何系とその接方程式系、つまり制限して得られる高階常微分方程式との関係について調べた。多変数超幾何系の接方程式系の仮想的変わり点や非遺伝性の2重変わり点などについて結果が得られた。さらに、非遺伝性の2重変わり点をきっかけとして、2重変わり点を持つ高階常微分方程式の仮想的変わり点についても進展があった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

微分方程式は自然現象を記述するだけでなく、様々な特殊函数を特徴付ける。このことから微分方程式の性質、特に解の無限遠での挙動など大域的性質を調べることは重要である。一方、完全WKB解析は微分方程式の解の大域的性質の考察に有効な手法である。このため、完全WKB解析の扱える範囲を広げることができれば、これまで扱えなかった自然現象の考察や特殊函数の解析などへの適用が期待できる。多変数超幾何系は基本的な多変数特殊函数を特徴付けており、さらに完全積分可能系の具体例であることから、完全WKB解析の扱える範囲を広げるために本研究の主題のひとつである多変数超幾何系を考察することは必要不可欠である。

研究成果の概要(英文)：We consider hypergeometric systems from the viewpoint of exact WKB analysis, which has been developed mainly for ordinary differential equations. In particular, we investigate the relationship between hypergeometric system and its tangential system, which is higher-order ordinary differential equation obtained by restricting it. We obtain the results on virtual turning points and non-hereditary double turning points of tangential system. In addition, with non-hereditary double turning points as a trigger, we also obtain the result on virtual turning points of higher-order ordinary differential equation with double turning points.

研究分野：数学

キーワード：完全WKB解析 超局所解析 漸近解析 完全積分可能系 超幾何系 Pearcey系 Stokes幾何 Stokes現象

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

完全 WKB 解析は WKB 解析, つまり特異摂動型の微分方程式の発散級数解 (WKB 解) を用いた解析, を Borel 総和法によって数学的に厳密に取り扱う手法である. この手法は, これまでに 1 次元定常 Schrödinger 方程式 (2 階線型常微分方程式), 3 階以上の高階線型常微分方程式, そして Painlevé 方程式を含む非線型常微分方程式に拡張され, 議論が展開されてきた. このように完全 WKB 解析は様々な方向に拡張されているが, 主な対象は常微分方程式であり, 偏微分方程式系について扱ったものは青木貴史氏による研究 (引用文献) のみであった. ここで完全 WKB 解析では Stokes 現象と呼ばれる WKB 解に起こる変化を記述することが重要であり, 2 階常微分方程式の場合には Stokes 現象が起こる場所は変わり点から出る Stokes 曲線によって完全に決定されている.

一方, Berk-Nevels-Roberts (引用文献) はある 3 階常微分方程式 (BNR 方程式) を考察した際に, 2 階常微分方程式の場合にはみられなかった "新しい Stokes 曲線" と呼ばれる曲線でも Stokes 現象が起こることを示した. その後, 青木氏, 及び河合隆裕氏, 竹井義次氏の研究 (引用文献) により, この新しい Stokes 曲線が "仮想的変わり点" と呼ばれる通常の変わり点とは異なる変わり点から出る曲線であることが示された. 仮想的変わり点, 及び新しい Stokes 曲線は高階常微分方程式の困難を表していると考えられており現在も研究が進められている. 例えば, 新しい Stokes 曲線は一般的に無限本現れるが, その中で有効なもの, つまり Stokes 現象が起こるものの特徴付けは重要な問題である.

以上のように完全 WKB 解析の偏微分方程式系への拡張は自然な流れであることから, 報告者によって完全積分可能系と呼ばれる偏微分方程式系に対して研究が進められ, 次の結果 (引用文献 ,) が得られていた.

- (1) BNR 方程式は 2 変数超幾何系である Pearcey 系の接方程式系, つまり制限して得られる方程式と考えられるが, BNR 方程式に現れる新しい Stokes 曲線は Pearcey 系の (Stokes 曲線の高次元化である) Stokes 曲面に含まれる. 同様の事実は青木-河合-竹井 (引用文献) で考察された無限個の仮想的変わり点, 従って無限本の新しい Stokes 曲線を持つ 3 階常微分方程式 (AKT 方程式) と 5 の分割 (1,4) から定まる 2 変数超幾何系 ((1,4) 型の超幾何系) に対しても成立する. さらに, これらの現象の背景には変わり点集合の特異点の存在があることが示唆された.
- (2) 2 変数の完全積分可能系は, その変わり点集合の特異点の近傍では Pearcey 系に WKB 解析的に変換できる. この系として, 完全積分可能系を制限して得られる高階常微分方程式に現れる新しい Stokes 曲線はもとの完全積分可能系の Stokes 曲面に含まれるという事実が, Pearcey 系や (1,4) 型の超幾何系のみならず, より一般の完全積分可能系に対しても (変わり点集合の特異点の近傍で局所的に) 成立する. このことは, 変わり点から出る Stokes 曲線と新しい Stokes 曲線は完全積分可能系の完全 WKB 解析においては区別がないことを意味する.

2. 研究の目的

本研究では, この完全 WKB 解析の完全積分可能系への拡張をさらに進めるべく, 具体的な完全積分可能系である多変数超幾何系に対して完全 WKB 解析の立場から考察を行う. これはまた, 高階常微分方程式に現れる仮想的変わり点と新しい Stokes 曲線の新たな視点からの理解を目指すものである. そこで本研究では次のテーマを設定した.

- (1) (1,4) 型の超幾何系の Stokes 曲面と AKT 方程式の有効な新しい Stokes 曲線: AKT 方程式には無限本の新しい Stokes 曲線が存在するが, その中で有効な新しい Stokes 曲線の特徴付けることは重要である. 本テーマでは, AKT 方程式が (1,4) 型の超幾何系の接方程式系であることを利用して, 有効な新しい Stokes 曲線の性質を調べ, 特徴付けを試みる.
- (2) 多変数超幾何系の Stokes 幾何: これまでに考察を行い, 結果を得るきっかけになった Pearcey 系や (1,4) 型の超幾何系は 2 変数超幾何系であるので, これ以外の多変数超幾何系に対して完全 WKB 解析, 特に Stokes 幾何を考察することは新たな進展が期待できる. 本テーマでは, Pearcey 系や (1,4) 型の超幾何系以外の多変数超幾何系とその接方程式系の Stokes 幾何の関係について考察を行う.
- (3) Pearcey 系の接続公式: 常微分方程式の WKB 解析的な変換による標準形である Airy 方程式の Stokes 現象を記述する接続公式は, 一般の常微分方程式の接続公式を導いた. このことから, 完全積分可能系の WKB 解析的な変換による標準形である Pearcey 系の接続公式を求めることは, 完全積分可能系の接続公式を得るために重要である. 本テーマでは, この接続公式を求めることを試みる.

3. 研究の方法

本申請課題を進めるために, 最新の結果と現在の問題の理解を進める必要があるが, そのためには完全 WKB 解析の研究を行っている青木貴史氏, 河合隆裕氏, 小池達也氏, 竹井義次氏と議論や情報共有を行うことが必要不可欠である. また, 本申請課題と関連が深い漸近解析, 代数解析, 超局所解析や複素領域の微分方程式などの研究者と研究交流を行う.

さらに, 研究の目的で述べたテーマ (1) ~ (3) に対し, 次のように研究を進めていく予定である.

- (1) (1,4)型の超幾何系の Stokes 曲面と AKT 方程式の新しい Stokes 曲線の関係の考察では計算機を用いることが必要不可欠であった。そこで、計算機を援用することにより、AKT 方程式の有効な新しい Stokes 曲線が(1,4)型の超幾何系の Stokes 曲面にどのように含まれているかについて考察を行う。
- (2) Pearcey 系と(1,4)型の超幾何系の次に構造がわかりやすいと考えられる5の分割(2,3)から定まる2変数超幾何系((2,3)型の超幾何系)に対して考察を行う。あるいは、Airy 方程式の解である Airy 積分は A2 型の特異点に関係しており、Pearcey 系の解である Pearcey 積分は A3 型の特異点に関係していることを踏まえ、A4 型の特異点に関する積分の満たす3変数超幾何系に対して考察を行う。特に、これらの超幾何系の接方程式系として現れる高階常微分方程式の新しい Stokes 曲線が、もとの超幾何系の Stokes 曲面に含まれているかを調べる。
- (3) Airy 方程式の接続公式が得られた理由は、その WKB 解の Borel 変換が Gauss の超幾何関数で記述できたからである。ここで Pearcey 系は Airy 方程式と同様に A 型の特異点に関する積分の満たす微分方程式であることから、その WKB 解の Borel 変換が何らかの特殊関数、例えば多変数超幾何関数で表現できることを期待するのは自然である。そこでこの期待が正しいかどうかを検討する。

4. 研究成果

上記の目標に対して、以下の結果、あるいは問題点が明らかになった。

- (1) AKT 方程式は(1,4)型の超幾何系の独立変数に由来するパラメータを持つが、このパラメータを動かした際の有効な新しい Stokes 曲線の変化を考察した。その結果、有効な新しい Stokes 曲線を出す仮想的変わり点とそうでない仮想的変わり点が入れ替わるということが確かめられた。さらに、この入れ替わりがパラメータ空間における3本の半曲線上で起こることが計算機を用いて確認できた。
- (2) (2,3)型の超幾何系や A4 型の特異点に関する積分の満たす3変数超幾何系を調べる過程で、非遺伝性の2重変わり点、つまりもとの完全積分可能系には存在しないが、その接方程式系に2重変わり点が存在することが明らかになった。このことは、接方程式系に現れる変わり点は、もとの完全積分可能系の変わり点集合の制限として得られる点のみという期待に反するものである。この非遺伝性の2重変わり点の考察を行う必要があるため、当初予定していた多変数超幾何系に対しては十分に結果を得ることができなかった。
- (3) Pearcey 系の WKB 解の Borel 変換を性質がよく知られた特殊関数で記述することはできなかった。このため、当初の予定を変更して Pearcey 系の解である Pearcey 積分、Borel 変換して得られる偏微分方程式系の特異点集合、積分表示解、級数解など他の性質から接続公式を得ることを試みたが、結果を得るには至らなかった。

以上のように多変数超幾何系に対する完全 WKB 解析を進展させるためには、非遺伝性の2重変わり点の性質を調べる必要がある。そこで予定を変更して非遺伝性の2重変わり点について考察を行い、次の結果を得た。

- (4) Pearcey 系の接方程式系は一般に非遺伝性の2重変わり点を持つことを示した。また、接方程式系の特性根や Pearcey 積分を用いて非遺伝性の2重変わり点の特徴付けを行った。そして、非遺伝性の2重変わり点から出る Stokes 曲線では Stokes 現象が起こらないこと、つまり Stokes 現象が起こる Stokes 曲線を出す変わり点は Pearcey 系の変わり点集合の制限として得られる点のみであることを証明した。さらに、非遺伝性の2重変わり点が存在することにより、Borel 変換した接方程式系の陪特性帯は分岐し、これまで考えられていなかった仮想的変わり点が見られることを示した。これらの仮想的変わり点は有効でないことも確かめられた。

このように Pearcey 系の接方程式系に現れる非遺伝性の2重変わり点の性質はほぼ解明することができたが、他の多変数超幾何系の場合に同様の考察を進め、Stokes 幾何の新たな知見を得ることはできなかった。ここで2重変わり点を持つ高階常微分方程式の仮想的変わり点は既存の研究でも考察されておらず、常微分方程式に対する完全 WKB 解析においても重要な対象であると考えられる。このことから2重変わり点を持つ高階常微分方程式を考察し、次の結果を得た。

- (5) Pearcey 系の接方程式系の低階項を摂動して得られる高階常微分方程式は、Stokes 現象が起こる Stokes 曲線を出す2重変わり点を持つことを示した。さらに、2重変わり点が存在することにより現れる仮想的変わり点から出る新しい Stokes 曲線は無限本あるが、有効なものは有限本ということを示した。

<引用文献>

- 青木貴史, ホロノミー系の完全 WKB 解析に向けて, 数理解析研究所講究録, **1433**, 2005, pp. 1-8.
 H. L. Berk, W. M. Nevins and K. V. Roberts, New Stokes' line in WKB theory, J. Math. Phys., **23**, 1982, pp. 988-1002.
 T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, New turning points in the exact WKB analysis for

higher order ordinary differential equations, *Analyse algébrique des perturbations singulières, I, Méthodes résurgentes*, Hermann, 1994, pp. 69-84.
S. Hirose, On the Stokes geometry for the Pearcey system and the (1,4) hypergeometric system, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B40**, 2013, pp. 243-292.
S. Hirose, On a WKB-theoretic transformation for a completely integrable system near a degenerate point where two turning points coalesce, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **50**, 2014, pp. 19-84.

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計4件)

S. Hirose, T. Kawai, S. Sasaki and Y. Takei, On the Stokes geometry of perturbed tangential Pearcey systems, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 査読有, to appear.
S. Hirose, T. Kawai and Y. Takei, Pearcey system re-examined from the viewpoint of s-virtual turning points and non-hereditary turning points, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 査読有, B75, to appear.
S. Hirose, On a non-hereditary turning point of a tangential system of the Pearcey system, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 査読有, B75, to appear.
S. Hirose, On the redundant and non-redundant virtual turning points for the AKT equation, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 査読有, B57, 2016, pp.39-59.

[学会発表](計17件)

S. Hirose, Borel summability of WKB solutions of ODEs of Schrödinger type, Seminar in UP, University of the Philippines Diliman, February 19, 2019.
S. Hirose, q-difference operators as differential operators of infinite order, Formal and analytic solutions of functional equations on the complex domain, Kyoto University, December 20, 2018.
S. Hirose, T. Kawai, S. Sasaki and Y. Takei, Stokes geometry of ordinary differential equations with double turning points related to confluent hypergeometric equations of two variables, Various Problems of Algebraic Analysis -- Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis --, Kyoto University, October 18, 2018.
廣瀬三平, 特異摂動の視点からの q-差分方程式について, 山口微分方程式セミナー, 山口大学, March 4, 2018.
S. Hirose, Exact WKB analysis for completely integrable systems, Geometric Structures Laboratory, University of Toronto, February 22, 2018.
S. Hirose, T. Kawai and Y. Takei, On virtual turning points originating from a non-hereditary turning point, Microlocal analysis and asymptotic analysis, Kyoto University, October 18, 2017.
S. Hirose, Asymptotic analysis of q-difference equation from the viewpoint of a differential operator of WKB type, FASdiff17, Universidad de Alcalá, September 7, 2017.
廣瀬三平, Stokes 超曲面の構造について, Accessory parameter 研究会, 熊本大学, March 16, 2017.
廣瀬三平, 偏微分方程式系の完全 WKB 解析について, Interaction between Pure and Applied Mathematics 2016, 明治大学, December 15, 2016.
廣瀬三平, On the structure of the Stokes hypersurface, 代数解析奈良研究集会, 奈

良女子大学, November 26, 2016.

S. Hirose, T. Kawai and Y. Takei, On some recent results in the theory of virtual turning points, New development of microlocal analysis and singular perturbation theory, Kyoto University, October 6, 2016.

S. Hirose, On non-hereditary turning points; particular turning points which appear in the deformation theory of ordinary differential equations, New development of microlocal analysis and singular perturbation theory, Kyoto University, October 6, 2016.

S. Hirose, On the structure of the Stokes hypersurface, Formal and Analytic Solutions of Partial Differential Equations, University of Lisbon, August 31, 2016.

廣瀬三平, Pseudo-Stokes hypersurface の特異点について, 複素領域の微分方程式, 漸近解析とその周辺, 広島大学, March 9, 2016.

S. Hirose, On the relationship between the BNR equation and the Pearcey system, Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, The Mathematical Research and Conference Center in Będlewo, September 15, 2015.

廣瀬三平, 特異摂動型 q -差分方程式について, 広島複素解析セミナー, 広島大学, July 31, 2015.

廣瀬三平, 完全積分可能なハミルトニアンの普遍開折とその量子化, Workshop on Accessory Parameters, 東京大学玉原国際セミナーハウス, June 20, 2015.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。