

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月10日現在

機関番号：32670

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17559

研究課題名(和文)無限大エルゴード理論の構築に向けた数論的変換のエルゴード理論的研究

研究課題名(英文)Ergodic theory of number theoretic transformations toward the construction of infinite ergodic theory

研究代表者

夏井 利恵(Natsui, Rie)

日本女子大学・理学部・准教授

研究者番号：60398633

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：無限大不変測度を持つ可測力学系におけるdeterminismとrandomnessの概念に着目し、エルゴード理論的研究からその概念の違いを捉える新たな不変量を見つける目的に向かって、数論的変換から生まれる数の持つランダム性に注目した。特に、虚二次体上でのnearest integer型の複素連分数変換や非アルキメデス数体上の数論的アルゴリズムにおいて、数の持つ複雑性に関する研究成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

未だに一般的体系が構築されていない無限大不変測度を持つ可測力学系に対するエルゴード理論において、determinismとrandomnessの概念の違いを捉える新たな不変量を見つけるために具体的な数論的変換から生まれる数の持つランダム性に着目し、その複雑性に関する研究成果を得た。数論的変換から生まれる数の複雑性に関する本研究成果は理論計算機科学と密接に結びついており、現代において必要不可欠である計算機の高速度や精度の向上に繋がることを期待する。

研究成果の概要(英文)：Toward the goal finding a new invariant which is captured the difference in the notion between determinism and randomness on measurable dynamical systems with infinite invariant measure, this research is focused on the randomness of number generated from number theoretic transformations. In particular, this research obtained the result about the properties of complexity for nearest integer complex continued fraction transformations over imaginary quadratic field and number theoretic algorithms over non-Archimedean field.

研究分野：エルゴード理論

キーワード：エルゴード理論 測度論的数論 複素連分数変換 ユークリッドアルゴリズム

## 1. 研究開始当初の背景

有限不変測度を持つ可測力学系のエルゴード理論的研究は、同型定理や分類問題など数多くの重要な結果が知られており、その一般的体系はある程度築き上げられている。一方、Furstenberg は多重再帰性定理、そして整数論における Szemerédi の定理との同値性を証明し、ある種の保存性を持つエルゴード変換が多重再帰性をもつことが Erdős 予想と同等であると主張したが、その主張は現在に至るまで証明されていない。この Furstenberg-Szemerédi の研究の流れはその後 Bourgain, Gowers により受け継がれ、Green-Tao により Erdős-Turan 予想の解決に繋がっている。Erdős 予想に対応するエルゴード理論には無限大不変測度を持つエルゴード変換の保存性が深く関わっていると予想される。また、多項式から作られる部分列に対して再帰定理を確立すると共に Ergodic Ramsey theory とよばれる分野を開拓した Bergelson も Erdős 予想と無限大不変測度を持つエルゴード変換の関係に注目している。しかしながら、このような変換に対しては個別の結果は幾つか知られているものの、その一般的体系はほとんど構築されていない。実際、エルゴード定理や再帰定理は成り立たない。このような研究背景からも、無限大エルゴード理論の新たな研究の進展が大いに期待されていた。

## 2. 研究の目的

本研究の全体構想は、エルゴード理論的研究から無限大不変測度を持つ可測力学系の分類・特徴付けを行い、一般的体系を築くことである。その中で本研究の目的は、この系における determinism と randomness の概念に着目し、具体的かつ多様な数論的変換の研究を通して、これらの概念の違いを捉える新たな不変量を見出すことにより系の分類問題へと発展させ、特徴付けを行うことにある。更に、本研究を通して測度論的数論や擬似乱数理論へ応用しながら数の complexity についてエルゴード理論からの新たな視点の発見、Erdős 予想との関連を強く意識した Ergodic Ramsey theory の追究、group action や tree 上での新しいエルゴード理論の展開など、従来のエルゴード理論の枠に留まることなく様々な分野との連携を目指した広い視野からの研究を目的とする。

## 3. 研究の方法

無限大エルゴード理論の一般的体系の構築に向けた第一歩として、無限大不変測度を持つ可測力学系において randomness を捉える新しい不変量を発見することに焦点を当てる。そこでまず様々な数論的変換に対する多角的な研究アプローチから数の振舞いを探り、fibred system (数展開のアルゴリズムに対応する写像の一般的体系) に研究対象を広げて行く。ここでは従来の有限不変測度系から無限大不変測度系へと拡張して行く中でこの系特有の性質から新しい不変量を見出し、randomness と determinism の違いを捉える。そして、fibred system における研究を足掛かりに無限大不変測度を持つ系の分類問題に新しい視点の確立を試みる。測度論的数論への応用、Erdős 予想、Ergodic Ramsey 理論との関連を常に問題意識として持ちながら取り組む。研究の効果的推進の為、海外共同研究者・研究協力者との連携を積極的に行いながら遂行して行く。海外での研究活動に重点を置く必要があり、海外研究機関に積極的に向き、共同研究、研究討論を重ねて行く。更に、国際研究集会での研究発表も積極的に行う。また、国内においては、エルゴード理論の研究の活性化を目的として、海外研究者を招聘した研究集会を積極的に開催する。

## 4. 研究成果

無限大不変測度を持つ可測力学系における determinism と randomness の概念に着目し、エルゴード理論的研究からその概念の違いを捉える新たな不変量を見つける目的に向かって、特に、数の持つランダム性に注目し、具体的な数論的変換に対して数の複雑な振る舞いを探った。主な研究成果は以下の通りである。

### (1) Hurwitz complex continued fraction maps に関するエルゴード理論的研究

これまで未解決であった nearest integer type の複素連分数である Hurwitz 連分数の natural extension の構成に成功した。更に、エルゴード理論的性質に留まることなく、タイリングとしての幾何学的性質も追究した。本研究成果は、[雑誌論文](1)に記載の共著論文として発表した。また、[学会発表](4)に記載の国際研究集会において発表を行った。

### (2) Nearest integer complex continued fraction maps に関するエルゴード理論的研究

Hurwitz 連分数変換の natural extension の構成に関する研究を基盤に、さらに対象の数論的変換のクラスを広げて行き、imaginary quadratic fields 上の nearest integer complex continued fraction maps の natural extension の構成に成功した。本研究によって、より複雑な振る舞いをする数について、総合的、統一的な視点が可能となった。本研究成果は H.Ei, H.Nakada との共著論文として準備中である。また、[学会発表](2), (3)に記載の国際研究集会において発表を行った。

(3) 非アルキメデス数体上での多次元ユークリッドアルゴリズムに関するエルゴード理論的研究

2次元ユークリッドアルゴリズムに対してこれまでに得た研究成果を3次元以上に拡張して行く研究に取り組んだ。特に、ユークリッドアルゴリズムのステップの回数を表す幾つかの cost functions に着目し、bivariate generating functions の手法を上手く用いながらユークリッドアルゴリズムの cost の振る舞いなどのエルゴード理論的性質の導出に成功した。本研究成果は、V.Berthe, H.Nakada, B.Vallee との共著論文として準備中である。

(4) 非アルキメデス数体上の数論的アルゴリズムに関するエルゴード理論的研究

非アルキメデス数体上でのユークリッドアルゴリズムに関するエルゴード理論的研究を基盤に、Brun algorithm など様々な数論的アルゴリズムとそれを導出する多次元写像に研究対象を広げて行き、そのエルゴード理論的性質の導出を試みた。研究対象を広げて行くことにより、様々な数展開の仕組みを統一的に見ることができようになり、本研究成果は今後 fibered system における研究に繋がって行く大きな前進となった。本研究成果は、V.Berthe, H.Nakada, B.Vallee との共著論文として準備中である。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 2 件)

Hiromi Ei, Shunji Ito, Hitoshi Nakada, Rie Natsui,  
On the construction of the natural extension of the Hurwitz complex continued fraction map,  
Monatshefte für Mathematik, 188, no. 1, 2019, 37-86. 査読有,  
<https://doi.org/10.1007/s00605-018-1229-0>

Dong Han Kin, Hitoshi Nakada, Rie Natsui,  
On the construction of continued fraction normal series in positive characteristic,  
Tokyo Journal of Mathematics, 39, no. 3, 2017, 679-694, 査読有,  
10.3836/tjm/1475723093

[学会発表](計 4 件)

Rie Natsui, On the group extension of complex continued fraction maps,  
St Virgil FWF/JSPS Meeting, Austria, 2019 年

Rie Natsui, On the construction of the natural extensions of the nearest integer complex continued fraction maps, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Taiwan, 2018 年

Rie Natsui, On the ergodic properties of the nearest integer continued fraction map over an imaginary quadratic field, St Virgil FWF/JSPS Meeting, Salzburg Austria, 2018 年

Hiromi Ei and Rie Natsui, On absolutely continuous invariant measures for complex continued fraction maps, Substitutions and continued fractions, LIAFA Paris, 2016 年

[図書](計 件)

〔産業財産権〕  
出願状況（計 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況（計 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：  
ローマ字氏名：  
所属研究機関名：  
部局名：  
職名：  
研究者番号（8桁）：

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：  
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。