様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９ （共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　研究成果報告書

平成 ３０ 年　９ 月　７ 日現在

機関番号： １３３０１
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2015～2017
課題番号： １５Ｋ１７５６０

研究課題名（和文）不確定特異点型共形場理論とパンルヴェ方程式

研究課題名（英文）An irregular version of conformal field theory and Painleve equations

研究代表者
名古屋　創（Nagoya, Hajime）

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：８０４４７３６７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、不確定特異点型共形場理論とパンルヴェ方程式を研究した。Virasoro 代数の表現論を用いて、不確定頂点作用素を定義し、その期待値として不確定共形ブロックを導入することに成功した。不確定共形ブロックを用いて、第四、五パンルヴェ方程式のタウ関数の無限遠点における Fourier 展開公式を証明した。第二、三パンルヴェ方程式のタウ関数の無限遠点における Fourier 展開公式の予想を得た。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we studied irregular version of the conformal field theory and Painleve equations. Using representation theory of Virasoro algebra, we defined irregular vertex operators and irregular conformal blocks. Using these irregular conformal blocks, we proved Fourier expansion formulas at infinity of the tau functions of the fourth and fifth Painleve equations and gave conjectural Fourier expansion formulas of the tau functions of the second and third Painleve equations.

研究分野： Integrable systems

キーワード： パンルヴェ方程式　共形場理論　モノドロミー保存変形

１．研究開始当初の背景

(1) 新しい特殊関数を発見するという 19 世紀数学の一つの問題意識のもと，P. Painlevé は動く分岐点をもたない非線形常微分方程式を研究することで，今日，パンルヴェ方程式と呼ばれる 2 階の非線形常微分方程式を 20 世紀初頭に発見した．その後，ある 2 階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形を記述する微分方程式として，第 6 パンルヴェ方程式 PVI が R. Fuchs によって導出された．パンルヴェ方程式は，方程式に含まれるパラメータが特殊な値をとるとき特殊解として，ガウスの超幾何関数に代表される超幾何関数ファミリーや楕円関数たちおよび代数解をもつ．一般には，それらの特殊関数では表せない超越関数を解にもつことが知られている．

(2) 楕円関数がテータ関数の比で表されるように，第 1 パンルヴェ方程式 PI の一般解が，二つの整関数の比で表わされることは，P. Painlevé 自身が示している．今では，すべてのパンルヴェ方程式がそのハミルトニアン H から導入されるタウ関数 $\tau(t)$ を用いて，二つの整関数の比であらわされることがわかっている．可積分系の理論において，タウ関数の重要性は広く認知されるところである．テータ関数は明示的な級数表示をもつが，パンルヴェ方程式のタウ関数の級数表示については，最近まで，第 6 パンルヴェ方程式 PVI のタウ関数の漸近展開の最初の数項が求められていただけだったが (Jimbo, Publ. RIMS, 1982)，2012 年に共形場理論の共形ブロックを用いた明示的な表示が発見された (Gamayun, Iorgov, Lisovyy, JHEP, 2012)．共形場理論の共形ブロックとゲージ理論の分配関数が一致するという AGT 対応により，共形ブロックもヤング図形を用いて明示的に書ける．

(3) しばらく，PVI のタウ関数が共形場理論の共形ブロックで表されることの証明は与えられていなかったが，2014 年に，共形場理論を用いて，モノドロミー保存変形により PVI を導く線形微分方程式の波動関数を構成することで，一つの証明が与えられた (Iorgov, Lisovyy, Teschner, Comm. Math. Phys., 2014)．これは，モノドロミー保存変形のタウ関数はその線形微分方程式の波動関数から導かれるという事実 (Jimbo, Miwa, Ueno, Physica 2D, 1981) に基づいている．一方で，パンルヴェ方程式のタウ関数はある双線形方程式で特徴付けられることが知られており，共形場理論の共形ブロックを用いて定義された $\tau(t)$ がその双線形方程式を満たすことが Virasoro 代数の表現論を用いて示された (Bershtein, Shchechkin, Comm. Math. Phys., 2014)．他のパンルヴェ方程式のタウ関数の明示的級数表示については，PVI のタウ関数に退化操作を行うことによって，第 3,5 パンルヴェ方程式のタウ関数の確定特異点の周りでの展開の明示的級数表示が得られていた(Gamayun, Iorgov, Lisovyy, J. Phys. A, 2013)．しかし，不確定特異点におけるパンルヴェ方程式のタウ関数の級数展開は得られていなかった．これは，確定特異点型の共形場理論ほどには，不確定特異点型の共形場理論が理解されていないことによる．

(4) 不確定特異点型の共形場理論については，パラメータが特別な場合には，不確定特異点型の頂点作用素を，自由場を用いて具体的に構成することで，不確定共形ブロックの積分表示が構成されている (Nagoya, Sun, J. Phys., 2010)．一般の場合には，不確定頂点作用素と Virasoro 代数の生成元との交換関係は導入されているが，Virasoro 代数の不確定 Verma 加群の間の作用素値関数としての頂点作用素の定義がはっきりしていなかった．

２．研究の目的

不確定特異点型の共形場理論を深化させ，応用としてパンルヴェ方程式のタウ関数の明示的級数表示を構成する．研究期間内には以下のことを明らかにする．

(1) 不確定版の頂点作用素を定義し，一意性と存在を証明する．続いて，不確定共形ブロックの定義を与える．

(2) 不確定共形ブロックの明示的表示を与える．

(3) モノドロミー保存変形の波動関数を構成する．

(4) タウ関数が双線形方程式を満たすことを証明する．

３．研究の方法

(1)確定頂点作用素を Verma 加群の最高ウェイトベクトルに作用させたとき，確定特異点型の級数展開となっていることから，不確定頂点作用素を不確定 Verma 加群の irregular vector に作用させたとき，不確定特異点型の級数展開となるものとして，不確定頂点作用素を定義する．そして，定義された不確定頂点作用素が一意的に存在するための条件を明らかにし，その条件の下で，不確定頂点作用素の存在および一意性の証明を与える．

(2)続いて，不確定共形ブロックの定義を与える．不確定共形ブロックの具体例を計算し，既知の級数を表すことを確認する．ポワンカレランクが 1 のときの不確定頂点作用素を用いると，Kummer の合流超幾何方程式の確定特異点 0 の周りの局所解と不確定特異点 1 の周りでの形式級数解が得られることはすでに確認した．Gauss の超幾何微分方程式の退化によって得られる，Bessel, Hermite, Airy の微分方程式のそれぞれの特異点の周りでの形式級数解を私が定義した不確定共形ブロックで表されることを確認する．

その後，量子第 6 パンルヴェ方程式（確定特異点型の線形偏微分方程式）以外の量子パンルヴェ方程式の各特異点の周りでの形式級数解を，不確定共形ブロックを用いて表せることを確認する．

(3) 適切に定義した不確定頂点作用素と不確定共形ブロックを用いて，モノドロミー保存変形の波動関数を構成する．波動関数を構成することができれば，Jimbo-Miwa-Ueno のモノドロミー保存変形理論より，パンルヴェ方程式のタウ関数が得られる．PVI に対するモノドロミー保存変形の波動関数の構成を簡単に振り返ると次のようにまとめられる：

①確定特異点型の共形ブロックはモノドロミー不変．

②確定特異点型の共形ブロックは無限次元空間をなすので，一つ一つの共形ブロックは 2 階の Fuchs 型微分方程式の解にはならない．

③1 点 z に特異条件が課された確定特異点型の共形ブロックの z に関する接続問題はガウスの超幾何微分方程式の接続問題に帰着する．

④ガウスの超幾何微分方程式に付随する接続行列が，局所解をうまくとれば，パラメータに関して周期 1 になる．

⑤適当に正規化された 5 点 0, 1, t, 1, z の共形ブロックの無限和を考えれば，2 階の Fuchs 型微分方程式の解になる．（z には特異条件が課されている．）

ここで，⑤が新たにわかったことであり，それ以外は以前からよく知られていた．不確定特異点型のときにも同様であることが期待され，接続問題あるいはストークス問題が 2 階の線形常微分方程式のそれらに帰着することが期待されるので，局所解をうまくとれば接続行列やストークス係数が周期 1 になることを示す．こうして不確定共形ブロックの正規化定数がわかるので，最後に正規化された不確定共形ブロックの可算無限個の和が，2 階の線形常微分方程式の解になることを示す．

(4) 2 つの Virasoro 代数の直和をフェルミオン代数とスーパー Virasoro 代数に埋め込むことで，PVI のタウ関数が双線形方程式を満たすことを示した Bershtein, Shchechkin の仕事を拡張して，(3) で得られたパンルヴェ方程式のタウ関数が双線型方程式を満たすことを証明する．

４．研究成果

(1)Virasoro 代数の不確定 Verma 加群の irregular vector への作用が，不確定特異点型の級数展開となるものとして，不確定頂点作用素を定義した．このとき，ポワンカレランクが r である不確定 Verma 加群から，別のポワンカレランクが r である不確定 Verma 加群への不確定頂点作用素が，定数倍を除いて，一意的に存在することを示した．(雑誌論文(3))

(2)不確定頂点作用素の合成の期待値として，不確定共形ブロックを定義し，退化条件を課すことで，不確定 Belavin-Polyakov-Zamolodchikov 方程式の解となることを示した．このことから，我々の不確定共形ブロックは特別な場合として，Kummmer の合流型超幾何関数，Hermite-Weber 関数の無限遠点における漸近展開を与えることがわかった．不確定共形ブロックを用いた第 4,5 パンルヴェ方程式のタウ関数の無限遠点におけるフーリエ展開公式の予想を得た．

(3) Verma 加群から，別のポワンカレランクが r である不確定 Verma 加群への不確定頂点作用素が，定数倍を除いて，一意的に存在することを示した．さらに，2 個の確定頂点作用素の合成からポワンカレランク 1 の不確定頂点作用素への極限操作を正当化することに成功し，応用として第 5 パンルヴェ方程式のタウ関数を不確定共形ブロックのフーリエ変換として表す式を証明した．

(4)2 点が確定特異点で 1 点がポワンカレランク 1 の不確定特異点である 3 点不確定共形ブロックの不確定特異点における漸近展開の明示的な表示に関する予想を，不確定共形ブロックの積分表示の漸近展開をシューア多項式を用いて表すことで得た．3 点不確定共形ブロックの不確定特異点での漸近展開は，skew Young diagram を用いて組合せ論的に表示できるという予想である．(雑誌論文(1))

(5)Virasoro 代数のポワンカレランク r の不確定 Verma 加群からポワンカレランク r の不確定 Verma 加群への不確定頂点作用素で，展開が半整数のべきで表されるものを考察し，分岐型不確定頂点作用素の定義を与えた．分岐型不確定共形ブロックを用いた第 2,3 パンルヴェ方程式のタウ関数の無限遠点におけるフーリエ展開公式の予想を得た．（学会発表(1)）

(6)以上の研究成果より，Virasoro 代数の場合に，期待される全ての不確定頂点作用素の定義を与え，第 2,3,4,5 パンルヴェ方程式のタウ関数のフーリエ展開を不確定共形ブロックで表した．一般の場合の不確定頂点作用素の定義を考察すること及びパンルヴェ方程式のタウ関数のフーリエ展開公式を証明する上で意義ある結果と思われる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

(1)Hajime Nagoya, Yasuhide Numata, Toward a combinatorial formula for an irregular conformal block of rank one, Josai Mathematical Monographs, 査読有り, 10 巻, 2017, pp. 81-95

(2)Hajime Nagoya, Fractional calculus of quantum Painlevé systems of type A_1^(1), Contemporary Mathematics, 査読有り, 651 巻, 2015. pp. 39-64

(3)Hajime Nagoya, Irregular conformal blocks, with an application to the fifth and fourth Painlevé equations, Journal of Mathematical Physics, 査読有り, 56 巻, 2015, 123505

〔学会発表〕（計 9 件）

(1)名古屋　創, Irregular conformal blocks and Painlevé tau functions, The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries, 2017/6/7

(2)名古屋　創, Irregular conformal blocks and Painlevé tau functions, The Tenth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, 2017/3/30

(3)名古屋　創, 共形場理論とパンルヴェ方程式, Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics, 2017/2/12

(4)名古屋　創, On degenerate limits of Virasoro conformal blocks, 5^{th} String Theory Meeting in the Greater Tokyo Area, 2016/12/2

(5)名古屋　創, On confluence of vertex operators of Virasoro algebra, JMM workshop on Representation Theory and Differential Equations, 2016/11/27

(6)名古屋　創, Irregular conformal blocks and Painlevé functions, Differential and Difference Equations: Analytic, Arithmetic and Galoisian Approaches, 2015/10/19

(7)名古屋　創, Conformal blocks and Painlevé functions, RIMS 研究集会「可積文系理論の諸分野への応用」, 2015/8/29

(8)名古屋　創, Irregular conformal blocks and Painlevé functions, TIMS-OCAMI-WASEDA International workshop on Painlevé equations and related topics, 2015/5/11, 5/12

(9)名古屋　創, Irregular conformal field theory and Painlevé tau functions, The Ninth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, 2015/4/1

〔その他〕

ホームページ等

https://researchmap.jp/nagoyah/

６．研究組織

(1)研究代表者

名古屋　創（NAGOYA Hajime）

金沢大学・理工研究域・准教授

研究者番号： 80447367