1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：３７１１２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７５６５
研究課題名（和文）ニュートン多面体を用いた調和解析学における漸近解析

研究課題名（英文）Asymptotic analysis in harmonic analysis by using Newton polyhedra

研究代表者
野瀬　敏洋（NOSE, Toshihiro）

福岡工業大学・工学部・助教

研究者番号：９０６３７９９３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：(1)ニュートン多面体を用いたトーリック・ブローアップについて考察した。このブローアップを用いて、特に2次元の場合に、無限回微分可能関数の零点が簡単な形に局所表示されることがわかった。(2)2次元の振動積分について、相関数が無限回微分可能関数である場合に、その漸近挙動を調べた。漸近極限にこれまでに見られない形で対数項が現れるなど、非常に興味深い結果を得た。(3)2次元の場合の特別な場合に、局所ゼータ関数がある点を越えて有理型関数として拡張できないことを示した。また、より一般的な場合について、その有理型拡張の範囲をニュートン多面体の幾何学的情報により評価した。

研究成果の概要（英文）：(1) We study toric blowing-ups related to Newton polyhedra. Using the blowing-ups, we locally represent the zero variety of smooth functions in simplified forms in two-dimensional cases. (2) We investigate the asymptotic behavior of oscillatory integrals with smooth phases in two dimensions. We have very interesting results such as log terms appearing in asymptotic limit of oscillatory integrals. (3) We show that local zeta functions can not be analytically continued as meromorphic functions across some point in some two dimensional smooth setting. In more general case, the region to which local zeta functions can be analytically continued as meromorphic functions are estimated by some geometrical information of Newton polyhedra.

研究分野：調和解析学

キーワード：ニュートン多面体　振動積分　局所ゼータ関数　トーリック・ブローアップ　特異点解消　漸近解析　解析接続

１．研究開始当初の背景

C^∞級関数$f(x_1,\dots,x_n)$の原点におけるテイラー展開に対して，係数が消えていない項の冪指数の集合をSとかく。集合$\{a+b : a\in S, b\in\mathbb{R}^n_{\geq 0}\}$の$\mathbb{R}^n$内における凸包がニュートン多面体とよばれるものである。ニュートン多面体は関数の局所的な性質の中でも，特に特異点論点的な性質を反映する図形であり，ニュートン以来，数学の様々な研究に用いられてきた。調和解析の分野においても例えば，振動積分の漸近解析に利用されている。ここで，振動積分とは

$$I(t)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)}\varphi(x)dx$$

で定義される積分であり，この無限遠点での挙動を調べることは非常に重要な問題である。その漸近挙動は，相関数fの特異点論的な性質に深く関連していることが知られている。特にその挙動はfの臨界点での性質に依存することが知られており，臨界点が退化している場合には，現在でも多くの場合が未解決である。

退化した場合の振動積分の研究に初めてニュートン多面体が用いられたのは，Varchenko らの研究においてである。彼らは，相関数fが実解析的かつある種の非退化性をもつ場合に，fのニュートン多面体の定量的な情報を用いて，振動積分の漸近挙動を詳しく調べている。その解析の本質的な部分は，fのニュートン多面体に基づく具体的な特異点解消を，トーリック多様体の理論を用いて構成するというものである。彼らの研究以降，振動積分の漸近解析や調和解析学の他の問題において具体的な特異点解消の構成が重要な役割を果たす，ということが認識されてきた。

一方，fがC^∞級関数の場合にはそのような特異点解消の理論は存在しないため，解析が非常に難しいものとなっていた。

２．研究の目的

本研究では，具体的に以下の 2 つのサブテーマを設定し，ニュートン多面体を用いた調和解析の研究を進めた。

(１)ニュートン多面体を用いた特異点解消及びブローアップについて考察する。また，ニュートン多面体の構造について，座標変換との関係を観察し，C^∞級関数の場合の解析に適する座標系の構成を試みる。

(２) 調和解析学における種々問題の中で，特にC^∞級関数についての未解決の問題に取り組む。取り扱う関数が実解析性をもつ場合に得られている結果と比較してC^∞級関数の場合にはどのような結果が得られるかに着目する。

３．研究の方法

ニュートン多面体について性質を考察し，それを基にした特異点解消及びブローアップを用いて，調和解析学における種々の問題に取り組んだ。具体的には，以下の問題に取り組んだ。

(１) ニュートン多面体を用いた特異点解消及びブローアップを具体的に構成することを試みる。また，ニュートン多面体の形状及びそこから得られる幾何学的な情報について詳しく調べる。ニュートン多面体の形状は座標系に依存するため，そこから座標不変な情報を得るためには，何か適切な座標系を構成する必要がある。実際に，adapted coordinates や superadapted coordinates という特別な座標系が振動積分の解析において構成されている。

(２) 振動積分の相関数fがC^∞級関数である場合の，無限遠点における漸近解析を行う。これまでに申請者らが得た結果(引用文献②)を一般化することを目的とする。我々は，fがあるC^\infty級関数のクラスに属し，かつある種の非退化の条件を満たす場合に，振動積分の漸近挙動を詳しく調べた。上記の結果は一般次元の場合のものであるが，まずは 2 次元の場合について考察する。

(３) 局所ゼータ関数の特異性及び有理型関数としての振る舞いについて調べる。局所ゼータ関数

$$Z(s)=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^s\varphi(x)dx$$

は右半平面で正則な関数であるが，fが実解析的であるならば，複素平面全体に有理型関数として解析接続されることが知られている。この証明には代数幾何における広中の特異点解消定理が用いられているため，fがC^∞級関数の場合にはその有理型性は一般に成り立たつかどうかわからない。なお，局所ゼータ関数が有理型関数として解析接続されると，フーリエ変換とメラン変換によって，振動積分の漸近展開が得られることが知られている。

４．研究成果

研究期間中に得られた結果は以下のとおりである。これらの結果は九州大学数理学研究院の神本丈氏との共同研究によるものである。

(1) 2 次元の場合に，C^∞級関数の零集合に対する局所的なトーリック・ブローアップを構成した。すなわち，ニュートン多面体から構成された複数のトーリック・ブローアップと座標変換を繰り返すことで，C^∞級関数が次のような形で局所的に表されることを示した：$f(x_1,x_2)=x_1^a x_2^b U(x_1,x_2)+\sum_{j=0}^{b-1}x_2^j g_j(x_1)$

ただし，a,bは正の整数，UはC^∞級関数で$U(0,0)\neq 0$を満たし，g_jは原点において平坦

(テイラー級数が零)なC^∞級関数である。この結果は実解析的関数の零集合に対する特異点解消に相当するものであり，今後C^∞級関数を取り扱う際に広く応用されることが期待される。この結果については現在論文を執筆中である。

(2) 2 次元の振動積分$I(t)$について，相関数がC^∞級関数である場合にその漸近解析を行った。

まず，相関数がニュートン多面体に関する解析的な条件を満たす場合に，振動積分のある展開を得た。また，その際の初項の係数を詳しく調べ，漸近極限の陽公式を得た。(雑誌論文②)

結果を述べるために，以下を定義する。今，fは非平坦，すなわち，ニュートン多面体が空集合でないとする。このとき，ニュートン多面体の境界と対角線集合$\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n_{\geq 0}:\alpha_1=\cdots=\alpha_n\}$との共通集合をニュートン多面体の境界の中心という。これは 1 点集合であるのでその点をq_*と表す。fのニュートン距離$d(f)$を中心q_*の座標成分により定義する。すなわち，$q_*=(d(f),\dots,d(f))$である。ニュートン多面体$\Gamma_+(f)$の面の中で中心q_*を含む最小のものを主要面という。主要面の余次元をニュートン距離の重複度といい，$m(f)$と表す。$d(f),m(f)$は superadapted な座標系において唯一つ定まることが知られている(引用文献①)。

定理 1. 座標系xはfについて superadapted であり，$d(f)>1$とする。また，ニュートン多面体の主要面が非コンパクトである場合には相関数が「主要面部」をもつと仮定する。φの台が$\mathbb{R}^2$の原点の十分小さい近傍に含まれるとき，fにのみ依存する正の実数δと$\mathbb{Q}$の部分集合S_δが存在して，

$$\left|I(t)-\sum_{\alpha\in S_\delta}(C_\alpha(\varphi)t^\alpha\log t+C'_\alpha(\varphi)t^\alpha)\right| < Ct^{-1/d(f)-\delta-\varepsilon}$$

を満たす。ただし，$C_\alpha(\varphi)$と$C'_\alpha(\varphi)$は定数，Cは正の定数，εは十分小さい正の定数である。さらに，集合S_δはfのニュートン多面体からあるアルゴリズムによって構成される有限個の等差数列を区間$[-1/d(f)-\delta,-1/d(f)]$に制限したものである。この展開の初項に関して，極限

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/d(f)}(\log t)^{-m(f)+1}\cdot I(t)=C(\varphi)$$

を得る。ただし，$C(\varphi)$は superadapted な座標系におけるfおよびそのニュートン多面体から陽的に定まる。特に，$\varphi(0,0)>0$かつ$\varphi(x_1,x_2)\geq 0$ならば，$C(\varphi)\neq 0$となる。

このような漸近展開および漸近極限については，これまでに限られた結果しか得られておらず、既存の結果より一般的な結果を得ることができた。解析においては局所ゼータ関数の有理型性を詳しく調べる必要があり、そちらの場合の解析結果については雑誌論文③で報告されている。

次に，2 次元の振動積分について，相関数が特別な非実解析的C^∞級関数である場合に，その漸近挙動を調べた(雑誌論文①)。

定理 2. $f(x_1,x_2)=x_2^q+e^{-1/|x_1|^p}$であるとする。ただし，$p>0$，$q$は 2 以上の整数とする。このとき，

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/q}(\log t)^{1/p}\cdot\int_{\mathbb{R}^2} e^{itf(x)}\varphi(x)dx$$

となる。ただし，C_qは 0 でない定数であり，

$$C_q=\begin{cases}4\Gamma(1/q+1)\cdot e^{\pi i/2q} & (q\text{は偶数})\\ 4\Gamma(1/q+1)\cdot\cos(\pi/2q) & (q\text{は奇数})\end{cases}$$

となる。

この結果は相関数のニュートン多面体の頂点が唯一つである場合の一つの例といえる。この結果の先行研究としては、さらに特別な場合の漸近挙動の評価が Iosevich-Sawyer により得られていたが，我々はより一般的な相関数についてより詳しい漸近極限を得た。ここで得られた漸近極限にはこれまでに見られない形で対数項が現れており，相関数のレギュラリティの違いが漸近挙動に強く影響を及ぼすことがわかった。

(3) 局所ゼータ関数$Z(s)$の有理型性について調べた。まず，局所ゼータ関数の正則性に関する性質として、正項ディリクレ級数に関するランダウの定理と類似した次の結果を得た。

定理 3. ρは非正の実数で，$\mathrm{Re}(s)>\rho$のとき$Z(s)$は収束するとする。$f(0)=0$, $|f(x)|<1$, および$\varphi(x)\geq 0$を仮定する。もし$Z(s)$が$s=\rho$のある開近傍へ正則関数として解析接続されるならば，$Z(\rho-\delta)$が収束するような正の数δが存在する。

この結果により，局所ゼータ関数が正則関数として定義される領域を調べるためには，その積分の実軸上での収束性を調べることが重要であることがわかる。我々は特別な非実解析的C^∞級関数fに対して，実軸上での局所ゼータ関数$Z(s)$の漸近挙動を詳しく調べた。

定理 4. $f(x_1,x_2)=x_1^a x_2^b+x_1^a x_2^{b-q}e^{-1/|x_1|^p}$であるとする。ただし，$a,b,q$は非負の整数で$a<b, 2\leq b, 1\leq q\leq b$を満たし，$p>0$である。さらに$q$は偶数であると仮定する。このとき次が成り立つ。

(i) $p>1-a/b$のとき，

$$\lim_{\sigma\to -1/b+0}(b\sigma+1)^{1-(1-a/b)/p}\cdot Z(\sigma)=4A\varphi(0,0)$$

となる。ただし，Aは正の定数であり次の積分で定義される。

$$A = \int_0^{\infty} x^{-\frac{a}{b}}(1 - e^{-1/(qx^p)})dx$$

(ii) $p = 1 - a/b$のとき，

$$\lim_{\sigma \to -1/b+0} |\log(b\sigma + 1)|^{-1} \cdot Z(\sigma) = \frac{4}{pq} A\varphi(0,0)$$

となる。

(iii) $0 < p < 1 - a/b$のとき，

$$\lim_{\sigma \to -1/b+0} Z(\sigma) = B(\varphi)$$

となる。ただし，$B(\varphi)$はある定数で，a, b, p, q, φに依存するがσには依存しない。また，$\varphi(0) > 0$かつ$\varphi(x) \geq 0$であるならば，$B(\varphi) > 0$となる。

定理4では局所ゼータ関数の特異点付近での漸近挙動に対数項が現れるなど，非常に興味深い結果が観察された。定理3と定理4で得られた結果を合わせると，定理4における非実解析的C^∞級関数fによって局所ゼータ関数が定まる場合には，その局所ゼータ関数を$s = -1/b$を越えて有理型関数として解析接続することはできないことがわかる。これらの成果はNon-polar singularities of local zeta functions in some smooth caseというタイトルで論文にまとめ，ある数学誌に投稿中である。

最後に，より一般的な状況での局所ゼータ関数の有理型性について次の結果を得た。

定理5.

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b U(x_1, x_2) + \sum_{j=0}^{b-1} x_2^j g_j(x_1)$$

であるとする。ただし，a, bは正の整数，UはC^∞級関数で$U(0,0) \neq 0$を満たし，g_jは原点において平坦なC^∞級関数である。φの台が十分小さいならば，$Z(s)$は領域$\mathrm{Re}(s) > -1/b$へ有理型関数として解析接続される。さらにその極は集合$\{-j/a : j \in \mathbb{N}\}$に含まれる。

定理4の結果はニュートン多面体の頂点が唯一つである場合のさらに特別な状況であった。定理5ではより一般的な関数fに対して，有理型拡張の範囲をニュートン多面体の幾何学的情報により評価することができた。この結果については現在論文を執筆中である。

＜引用文献＞

① Michael Greenblatt: The asymptotic behavior of degenerate oscillatory integrals in two dimensions, J. Funct. Anal. 257 (2009), 1759–1798.

② Joe Kamimoto and Toshihiro Nose: Toric resolution of singularities in a certain class of C^∞ functions and asymptotic analysis of oscillatory integrals, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 23 No. 2 (2016), 425–485.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計3件）

① Joe Kamimoto and <u>Toshihiro Nose</u>: Asymptotic limit of oscillatory integrals with certain smooth phases, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B63 (2017), 103–114. 査読有.

② Joe Kamimoto and <u>Toshihiro Nose</u>: On the asymptotic expansion of oscillatory integrals with smooth phases in two dimensions, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B57 (2016), 141–158. 査読有.

③ Joe Kamimoto and <u>Toshihiro Nose</u>: On meromorphic continuation of local zeta functions, Complex Analysis and Geometry, Springer Proc. Math. Stat. 144 (2015), 187–195. 査読有.

〔学会発表〕（計6件）

① <u>野瀬敏洋</u>: 局所ゼータ関数の解析接続と漸近解析について，第60回函数論シンポジウム (2017).

② <u>Toshihiro Nose</u>: Failure of meromorphy of local zeta functions, A Special SCV Day @ GAIA (2016).

③ <u>野瀬敏洋</u>: On the meromorphy of local zeta functions, 複素解析幾何学のポテンシャル論的諸相 (2016).

④ <u>野瀬敏洋</u>: On the meromorphy of local zeta functions, 2015年度多変数関数論冬セミナー (2015).

⑤ <u>Toshihiro Nose</u>: Meromorphic conti-nuation of local zeta functions, The 23rd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications (2015).

⑥ <u>Toshihiro Nose</u>: On the meromorphy of local zeta functions, Young Mathematicians Workshop on Several Complex Variables 2015 (2015).

６．研究組織

(1)研究代表者

野瀬　敏洋（NOSE, Toshihiro）
福岡工業大学・工学部・助教
研究者番号：９０６３７９９３