様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 １８ 日現在

機関番号：１３１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１７５６６

研究課題名（和文）空間非局所な作用素をもつ拡散方程式の解の漸近挙動について

研究課題名（英文）Asymptotic behavior of solutions to the dissipative equation with nonlocal operator

研究代表者
山本　征法（Yamamoto, Masakazu）

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：００６０００６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、空間非局所な作用素を含む方程式について、解の適切性および変数に依存した構造を明らかにした。空間非局所な作用素の代表例として、跳躍過程に由来する分数冪ラプラシアンが挙げられる。当該研究では、移流拡散方程式や準地衡近似方程式などの分数冪拡散方程式について、解の適切性と挙動を調べた。その結果、スケール保存の空間における解の適切性と時間大域拡張性を示すことが出来た。また、解の時空変数に依存した減衰構造を明らかにした。空間非局所な作用素を含む重要な例としては、他にNavier-Stokes方程式が挙げられるが、本研究ではこの時間大域解の時空遠方での構造について、従来よりも精密な評価を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
空間非局所な作用素の一例として跳躍過程に従う粒子の拡散を与える分数冪ラプラシアンが挙げられる。跳躍過程に従う粒子とは、半導体内部の荷電粒子や、田畑を飛び回る害虫のように、離れた点の間を瞬時に移動する粒子のことで、その拡散はブラウン運動では記述されない。本研究では、分数冪拡散方程式の解の時空変数に依存した挙動を明らかにした。その結果、熱の拡散などブラウン運動に従う粒子と比べて、空間遠方に分布する粒子の時間変動に大きな相違があることが明らかとなった。さらに当該研究では、Navier-Stokes方程式など非線形外力に空間非局所な作用素を含む方程式に対しても、解の構造を明らかにする手法を開発した。

研究成果の概要（英文）：In this study, the structure with space-time variable of solutions of the dissipative equation with nonlocal operator is shown. An important example of nonlocal operators is the fractional Laplacian which is derived from the jumping process. This study treated well-posedness and behavior of solutions of the fractional diffusion equations which contain the drift-diffusion equation and the quasi geostrophic equation. For those equations, the well-posedness of solutions in the function space of the scale invariant and the global existence of the solution were proved. Moreover, asymptotic behavior of the solutions

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：函数方程式　函数解析　実解析　応用数学　数理物理学

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

研究課題である空間非局所な作用素として、当初から研究対象としていたものに分数冪ラプラシアンによる拡散が挙げられる。分数冪ラプラシアンは、半導体素子内部の荷電粒子など、跳躍する粒子の拡散を記述するのに最適な作用素である。跳躍する粒子として想定されるものには他にも、田畑の中を飛翔する害虫などが挙げられる。また、Navier-Stokes 方程式との関連の深さで注目されている準地衡近似方程式も、分数冪ラプラシアンによる拡散方程式の重要な例である。このように、分数冪拡散方程式は応用上・数理解析学上あらゆる場面で現れる重要な拡散モデルである。分数冪ラプラシアンはその名の通り、熱拡散を記述する際に現れるラプラシアンを一般化したものであり、熱方程式と分数冪拡散方程式を比較すると、基本解のスケーリング構造や解の時間変数への依存度などに連続的な繋がりが見られる。一方で、空間非局所な作用素を含む方程式に一般に見られるように、分数冪拡散方程式の解は、その空間遠方での挙動を初期データでコントロール出来ないという特性を持つ。この特性故に、分数冪拡散方程式の解の漸近解析は一般に困難を伴うと考えられてきた。特に、精密な漸近近似を得ようとしたとき、剰余項の空間可積分性の観点から、その近似精度には宿命的な限界があるとされてきた。以上の難点は、分数冪拡散作用素の Fourier 表象の特異性に起因するものである。

全く同様の性質が、非圧縮性粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式の解にも見られる。これは、Navier-Stokes 方程式中の Helmholtz 分解に含まれる Riesz 変換の Fourier 表象がやはり特異であることによる。Navier-Stokes 方程式は流体の速度を記述する方程式であるが、非圧縮性粘性流体の場合は、流速と渦度の間に同値な関係(Biot-Savard の法則)があることが知られている。当該研究を開始した当時、この渦度を介して流速の空間遠方での挙動を精密に近似する研究が Kukavica らによって行われており、空間変数に依存した流速の精密な減衰構造が既に知られていた。この先行研究の画期的な点は、渦度の空間遠方での挙動が初期渦度によって支配されるという事実を用いて、流速の空間遠方での近似精度を任意の階数まで上げたことである。しかし、この先行研究では流速の空間遠方での構造の時間変化までは十分に捉えていなかった。当該研究では、この先行研究に着想を得て、流速の時間変数に依存した構造と空間変数に依存した構造を一度に捉えることを目指した。同様の観点から、分数冪拡散方程式の解挙動の精密な近似を得る際に、空間遠方での構造が時間によってどのように変化するかが重要な課題であった。

分数冪ラプラシアンによる拡散方程式は、その拡散冪によって拡散の強さを指定出来るが、外力項を持つ方程式の場合は、外力項と拡散項が解に及ぼす支配度のバランスが、解の時空遠方での挙動を決定する。最も興味深いのは、これら 2 つの力が釣り合う状態である。実際、準地衡近似方程式の場合、力の釣り合いが起こる状態と、所謂スケール臨界と呼ばれる状態とが一致し、この状態を境に解の性質が大きく変わることが知られている。当該研究計画では、各種の分数冪拡散方程式において、2 つの力が釣り合う場合の解の適切性、特に時間大域解の存在とその挙動に注目した。一方、方程式によっては、力の釣り合いとスケール臨界との間にずれがあることが分かっている。このような方程式を、可解性や解の挙動の観点から準地衡近似方程式と比較したとき、どのような相違が現れるか明らかにすることも当該研究計画の課題の 1 つであった。

上記の、分数冪拡散方程式の解の漸近評価を得るために、先行研究では初期データに空間遠方での速い減衰を仮定している。一方、上述の通り解の空間遠方での挙動は初期データでコントロール出来ない。解の半群性と併せて考えると、先行研究における初期データの条件は強すぎるように見える。本研究計画では、初期データに対する適切な条件下で解の漸近評価を得ることを目指した。

２．研究の目的

本研究計画では、非線形拡散方程式を中心に、空間非局所な作用素を含む方程式の解の時間変数・空間変数に依存した構造を明らかにした。一般に非線形発展方程式の初期値問題を考えたとき、その解を初等函数で書くことは極めて困難であるか不可能である。そのため、変数に依存した解の構造を近似的に明らかにする必要が生じる。特に時間大域的な挙動と空間遠方での減衰構造が、解の全体像を捉える上で重要な情報を与える。分数冪ラプラシアンや Riesz 変換に代表される空間非局所な作用素(より正確には Fourier 表象に特異性が現れる作用素)が方程式に含まれる場合、これらの作用素の特性が解の空間遠方での振る舞いに決定的な影響を与える。本研究は、方程式に含まれる空間非局所な作用素が解に及ぼす影響を、解の漸近展開を通して明示することを目的とするものであった。これにより、具体的に書くことの出来ない解の、おおよその形を捉えることが可能となる。特に、解の空間遠方における構造が時間に依存してどのように変化するかを捉える「時空遠方での漸近展開」を得ることを目指した。

空間非局所な作用素を含む方程式を考える際、しばしば解の空間遠方での減衰に宿命的な遅さが見られる。この性質は、解の精密な漸近近似を得る際に致命的な障害となる。実際、解の高階の漸近展開には解の高階モーメントが係数として含まれるが、解の空間遠方での減衰が遅いと、この高階モーメントの可積分性が崩れてしまう。これにより、先行研究では解の漸近近似の精度に限りがあるものとされてきた。本研究では、Navier-Stokes 方程式および分数冪拡散方程式の解について、この近似精度の限界を解消することを目的の 1 つとした。

また、「研究開始当初の背景」でも述べたが、これまでの研究では、解の漸近展開を得るため

に、初期データに対し不自然に強い仮定を与えている。この研究計画では、自然な仮定の下で同様の漸近評価が得られないかを検討した。
　非線形拡散方程式のうち、保存則に由来する方程式の外力項は、発散型ないしそれに準ずる構造を持つ。これらの方程式の拡散を分数冪ラプラシアンで与え、かつ拡散の指数を小さく取ると、線形の拡散と非線形外力が、少なくとも見かけ上は釣り合った状態になる。一方で、方程式によって非線形項に現れる微分の階数などの構造が異なるため、解の持つスケーリングもそれぞれに異なる。勿論、Keller-Segel 方程式など、自己相似の構造を一切持たない方程式も存在する。このことから、方程式により釣り合いの状態が本質的なものと見かけだけのものがあることが予想される。本研究計画では、解の空間遠方での挙動を通して、これらの方程式の解の構造に本質的な相違があるかを解明することを目的の一つとした。

３．研究の方法

　本研究計画では、まず分数冪移流拡散方程式の解の漸近展開を導出した。移流拡散方程式は、非線形の外力に発散の構造を持つため、拡散の冪を小さく取ると、線形の拡散と非線形外力とが見かけ上釣り合う「共鳴」と呼ばれる状態が現れる。類似の準地衡近似方程式については、この共鳴に相当する状態と時空変数に関するスケール臨界の状態とが重なる。そのため、準地衡近似方程式の場合は、この臨界指数を境にして、解の性質が大きく変わることが知られている。一方、移流拡散方程式の場合は、準地衡近似方程式とはスケールのずれがあるため、同様のことが起こるかどうか不明であった。本研究では、移流拡散方程式の非線形項を評価する際に現れる交換子の構造に着目し、時間大域解の存在と、その時間大域挙動を考察した。従来は、これらの方程式の時空遠方での挙動を調べるには、軟解に対する L^p-L^q 評価が用いられてきた。しかし、見かけ上の臨界である共鳴状態や、見かけ上超臨界の場合には、L^p-L^q 評価に不可欠な非線形外力の可積分性が破綻するという難点が生じる。当該研究では、この可積分性の破綻を回避するために、L^p-L^q 評価の際にエネルギー法を補助的に用いる。その際に、交換子の評価が有効であろうと予想して研究を進めた。なお、研究を進めていく過程で、エネルギー法と交換子評価の組み合わせが、他の分数冪拡散方程式に対しても有効であることが分かってきた。特に、臨界や超臨界の準地衡近似方程式の解挙動を調べる上で、この手法は不可欠なものであった。
　分数冪拡散方程式の他に、当該研究で取り扱う方程式で重要なものに Navier-Stokes 方程式がある。この場合、空間非局所な作用素とは Riesz 変換のことであるが、Riesz 変換を含む故に Navier-Stokes 方程式の解は空間遠方で特徴的な振る舞いをする。この振る舞いを解明するために、従来から解の時間大域挙動・空間遠方での挙動が調べられてきた。しかし、これらの挙動を記述する漸近展開には、その構造上の問題により精度の限界があった。この限度を克服するため、本計画では、漸近展開に時空変数に関する繰り込みを適用した。
　上記と同様の問題は、分数冪ラプラシアンによる拡散方程式の解の挙動を調べる際にも問題となる。本研究計画では、分数冪拡散方程式の解に対しても、繰り込みの適用によりその精密な漸近近似の導出を目指した。

４．研究成果

　本研究では、空間非局所な作用素を含む方程式について、解の適切性および変数に依存した構造を明らかにした。当該計画で研究対象とした作用素は、空間非局所なもののうち特に、その Fourier 表像に特異性を有するものである。Fourier 表象の滑らかさは、その作用素が作用した函数の空間遠方での挙動を決定する。したがって、方程式中の作用素の Fourier 表象に特異性があれば、解の空間遠方での減衰は遅くなる。Fourier 表象に特異性を持つ作用素の代表例として、跳躍過程に由来する分数冪ラプラシアンが挙げられる。この作用素で記述される拡散には、半導体素子内部の荷電粒子の拡散や、飛翔する害虫の伝搬などがある。当該研究では、移流拡散方程式や準地衡近似方程式などの分数冪拡散方程式について、解の適切性と時間大域解の存在、およびその挙動を調べた。これらの方程式について考察する際には、自己相似解の存在の有無と、その構造に着目したスケール保存空間での可解性が重要な指標となる。本計画では、スケール保存の空間における解の適切性と時間大域拡張性を示すことが出来た。また、解の時空変数に依存した減衰構造を明らかにした。
　まず、移流拡散方程式については、拡散の冪を非線形外力と見かけ上釣り合う指数に取ったとき、拡散冪に対して連続的な結論が得られた。すなわち、拡散冪の大小に関わらず、時間大域解が存在し、しかも時空遠方で線形の基本解に漸近することが分かった。これは、線形の拡散と非線形外力の釣り合いがあくまで見かけ上のものであり、いずれの場合も移流拡散方程式が放物型の範疇に含まれることを意味している。
　分数冪拡散方程式のうち、保存則に由来する他の方程式と比べて、特別な取り扱いが必要なものとして準地衡近似方程式が挙げられる。準地衡近似方程式は空間 2 次元の拡散方程式として定式化されるが、3 次元の Navier-Stokes 方程式と同じ臨界指数を持つため、多くの先行研究が存在する。さらに、この臨界指数に相当する線形拡散は、ちょうど非線形外力と釣り合いの指数を取る。このため、本研究でも準地衡近似方程式を特に重要な研究対象として位置づけてきた。その結果、臨界や超臨界の場合の解に対して、従来困難と考えられてきた時空遠方での漸近評価を導くことが出来た。この評価は、未知函数である解を、漸近形と呼ばれる具体的

な函数で近似することで実現される。準地衡近似方程式については、移流拡散方程式と同じく、線形の基本解により漸近形が与えられることを明らかにした。ただし、準地衡近似方程式の場合は類似の移流拡散方程式とは異なり、漸近評価の正当化には初期データの滑らかさと小ささが不可欠である。これは準地衡近似方程式の場合、「共鳴」と「スケール臨界」が重なることを考えれば自然な帰結である。

その Fourier 像に特異性を持つ作用素として、他にも Riesz 変換が重要なものとして挙げられる。Riesz 変換を含む代表的な方程式に Navier-Stokes 方程式があるが、本研究ではこの時間大域解の時空遠方での構造について、繰り込みにより従来よりも精密な評価を得た。Navier-Stokes 方程式の解については、従来より空間遠方での流速の減衰について精密な評価が知られていたが、当該研究により空間遠方での減衰評価が時間に依存して変化する様子を明示することが出来た。さらに、この時空に関する評価はスケーリングの観点から最適なものであることが分かっている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　4 件）すべて査読あり

1. <u>Yamamoto, M.</u>, Sugiyama, Y., Spatial-decay of solutions to the quasi-geostrophic equation with the critical and the supercritical dissipation, Nonlinearity **32** (2019), 2467-2480. (2019 年 3 月 8 日)
2. Achleitner, F., Jungel, A., <u>Yamamoto, M.</u>, Large-time asymptotics of a fractional drift-diffusion-Poisson system via the entropy method,Nonlinear Anal. **179** (2019), 270-293. (2018 年 8 月 29 日)
3. <u>Yamamoto, M.</u>, Sugiyama, Y., Asymptotic expansion of solutions to the drift-diffusion equation with fractional dissipation, Nonlinear Anal. **141** (2016), 57-87. (2016 年 3 月 24 日)
4. <u>Yamamoto, M.</u>, Sugiyama, Y., Asymptotic behavior of solutions to the drift-diffusion equation with critical dissipation, Ann. Henri Poincare. **17** (2016), 1331-1352.(2015 年 6 月 24 日)

〔学会発表〕（計　10 件）いずれも査読なし

1. <u>山本征法</u>, 杉山裕介, 準地衡近似方程式の解の時空遠方での挙動について, 第 10 回 北海道-東北 偏微分方程式コンソーシアムセミナー, 新潟大学駅南キャンパスときめいと, 2019 年 1 月 25 日-27 日.
2. Achleitner, F., Jungel, A., <u>Yamamoto, M.</u>, Application of the entropy methods to the fractional diffusion equations, Mathematics of Schrodinger Equations and Related Topics, Toi Branch of Izu City Office, Shizuoka, Japan, January 7, 2019.
3. <u>山本征法</u>, 杉山裕介, 臨界型・超臨界型準地衡近似方程式の解の挙動について, 第 28 回 数理物理と微分方程式, KKR はこだて, 2018 年 11 月 2 日-4 日.
4. <u>山本征法</u>, 杉山裕介, 準地衡近似方程式の解の空間遠方での減衰について, 日本数学会 2018 年度秋期総合分科会, 岡山大学, 2018 年 9 月 26 日.
5. <u>山本征法</u>, 杉山裕介, 分数冪拡散方程式の解の空間遠方での挙動について, 第 8 回 北海道-東北 偏微分方程式コンソーシアムセミナー, 弘前大学, 2018 年 3 月 28 日.
6. <u>Yamamoto, M.</u>, Sugiyama, Y., Asymptotic expansion of solutions to the drift-diffusion equation with anomalous diffusion, Equadiff 2017, Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia, July 27, 2017.
7. <u>山本征法</u>, Navier-Stokes 方程式の解の漸近評価について, 第 27 回 数理物理と微分方程式, かんぽの宿 富山, 2016 年 11 月 25 日.
8. <u>山本征法</u>, 杉山裕介, 拡散冪が小さな移流拡散方程式の解の漸近展開について, 第 26 回 数理物理と微分方程式, ニューサンピア姫路, 2015 年 11 月 1 日.
9. <u>山本征法</u>, 杉山裕介, 超臨界型移流拡散方程式の解の時間大域挙動について, 応用数学セミナー, 東北大学, 2015 年 7 月 23 日.
10. <u>山本征法</u>, 杉山裕介, 超臨界型移流拡散方程式の解の漸近挙動について, 第 10 回 弘前解析セミナー, 弘前大学, 2015 年 7 月 17 日.

〔図書〕（計　1 件）

1. <u>山本征法</u>, 杉山裕介, Asymptotic behavior of solutions to the drift-diffusion equation of elliptic type, 数理解析研究所講究録 1984, 抽象発展方程式理論から見た偏微分方程式に関する評価方法の再考, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 2 月.

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

○取得状況（計　０件）

６．研究組織

(1)研究分担者 なし

(2)研究協力者
研究協力者氏名：Franz Achleitner (University of Vienna)

研究協力者氏名：Ansgar Jungel (Vienna Institute of Technology)

研究協力者氏名：加藤 圭一（東京理科大学）
ローマ字氏名：Keiichi Kato

研究協力者氏名：杉山 裕介（滋賀県立大学）
ローマ字氏名：Yuusuke Sugiyama