

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 26 日現在

機関番号：12401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K17567

研究課題名（和文）変分法と摂動法による非線形楕円型方程式の研究

研究課題名（英文）Study on nonlinear elliptic partial differential equations via variational method and perturbation methods

研究代表者

佐藤 洋平 (Sato, Yohei)

埼玉大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：00465387

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：研究期間において6篇の論文を発表し1篇の論文の掲載が決定した。具体的には、3つの楕円型方程式から成る連立楕円型方程式において、相互作用項に引力的な項と斥力的な項が混じっている場合の解構造を研究し、正值解の多重存在、正值解の非対称な解の形状、符号変化解の多重存在に関する研究成果を得た。また無限遠で定数に漸近するポテンシャル関数をもつ楕円型方程式が、先行研究よりも一般的な非線形項をもつときに、無限個解をもつことを証明した。空間1次元のときはポテンシャル関数の形状によっては非自明解をもたないことも証明した。無限に強い引力効果をもつ連立非線形シュレディンガー方程式のピーク解に関しても研究成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

連立シュレディンガー方程式は、比較的最近研究が試みられるようになった方程式であるが、連立非線形シュレディンガー方程式の変分構造は単独の方程式の変分構造と似ているため、多くの研究が急速に発表されていた。しかし、単独の方程式と連立方程式の解構造の本質的な違いを抽出するような研究結果はそれほど多くはなかった。本研究は、連立方程式では、たとえ方程式の係数が空間変数に依存しなくても、複雑な解構造を持ち得ることを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：In the research period, 7 papers are published or accepted. We studied the solutions structure of system which consists of three elliptic partial differential equations with an attractive coupling and two repulsive couplings. Consequently, We obtained new results with respect to the multiple existence of positive solutions, the non-symmetry of the solutions, and the multiple existence of sign-changing solutions. We also proved the existence of infinitely many solutions to elliptic partial differential equations whose the potential function approaches a positive constant at infinity under more general assumptions of nonlinearity. In addition, when the spatial dimension is 1, we also proved the nonexistence of nontrivial solutions. We also obtained the results with respect to the localized solutions of the nonlinear Schrödinger system with critical frequency for infinite attractive case.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：楕円型偏微分方程式 変分法 摂動法

1. 研究開始当初の背景

連立非線形シュレディンガー方程式の変分的手法による最初の研究論文は 2005 年の Lin-Wei の論文[1]と言われており、比較的最近研究が試みられるようになった方程式である。連立非線形シュレディンガー方程式の変分構造は単独の方程式の変分構造と似ているため、多くの研究が急速に発表されていた。しかし、単独の方程式と連立方程式の解構造の本質的な違いを抽出するような研究結果はそれほど多くはなかった。最近 Zhi-Qiang, Wang 教授との共同研究[2]で得た結果は、単独の方程式と連立方程式の解構造の本質的な違いの一つを表す興味深い結果であった。

具体的には、参考文献に挙げた[2]の論文では 3 本の方程式から成る連立非線形シュレディンガー方程式を研究している。3 本の方程式の場合、相互作用項の係数は 3 つあることに注意する。[2]ではそのうち 2 つが負の数であり、1 つが正の数で十分大きいとき、正值解の存在を変分法と摂動法を用いて証明している。さらに方程式が定義された領域が球であっても、その正值解は球対称でないことも証明している。これは単独の方程式に対する Gidas-Ni-Nirenberg の「方程式が定義された領域が球であれば、その任意の正值解は球対称解である」という結果と明らかに対称的な結果である。またこれは Lin-Wei の論文[1]で示された「相互作用項の係数がすべて正ならばエネルギー最小解は球対称である」という結果とも対称的な結果である。[2]の結果は、連立方程式の場合、方程式の係数が空間変数に依存しなくても、複雑な解構造を持ち得ることを示唆する結果であると考えられた。

2. 研究の目的

上記の背景を踏まえて、本研究の目的は、連立非線形シュレディンガー方程式の解構造を解明することを通じて、係数が空間変数に依存しない連立方程式でも複雑な解構造を持ち得ることを明らかにすることであった。具体的には、研究当初、次の研究を目的として設定した。

- (1) [2]の正值解の非球対称性の結果は、正值解の多重存在を示唆していると考えられる。そこで本研究では正值解の多重存在を証明する。
- (2) [2]では、正の係数を十分大きくしたとき、1 つの成分関数は単独の方程式の解に近づき、他の 2 つの成分関数は境界の近くにピークをもつという結果も得ていたが、そのピークが集中する場所を特定し、その場所がどのように決まるのかを解析する。
- (3) [2]では正值解の存在とその形状を調べているが、符号変化解の存在と多重性について考察する。

また研究過程で派生した次の問題も研究した。

- (4) 無限遠で定数に漸近するポテンシャル関数をもつ非線形シュレディンガー方程式の解の存在問題
- (5) 無限に強い引力効果をもつ連立非線形シュレディンガー方程式において、非負のポテンシャルが 0 に接する場合のピーク解の存在問題

3. 研究の方法

上記の(1)~(5)について以下のように研究をした。

- (1) 領域が球の場合を考え、[2]の論文で用いた議論を N 次元直交群 $O(N)$ の有限部分群の作用に関する対称性を付随させた関数空間に制限して適用することで、その群作用に関して対称な正值解を得る方法を用いた。本研究はユタ州立大学の Zhi-Qiang Wang 教授との共同研究として行った。
- (2) 本研究はユタ州立大学の Zhi-Qiang Wang 教授と、韓国の KAIST の J. Byeon 教授との共同研究として行なった。境界の曲率によって決まるという予想を最初に示唆したのは J. Byeon 教授である。これが証明可能であると期待する基礎的な摂動問題の解析は、私と Zhi-Qiang Wang 教授の共著論文[2]で成されていた。
- (3) 符号変化解の存在についてはどの成分関数が符号変化させるかで使える変分的な手法が異なる。Castro-Cossio-Neuberger の用いた丁度一回符号変化する解を見つける手法と symmetry mountain pass を使用する手法を用いた。これはユタ州立大学の Zhi-Qiang Wang 教授と協力して研究を行なった。
- (4) 本研究の空間次元が 3 以上の場合の解の多重存在の研究は、東京工業大学の柴田将敬氏との共同研究として行った。空間 1 次元の場合の解の存在と非存在の証明は、単独の研究として行った。
- (5) 本研究は東北師範大学の Xiaojun Chang 教授との共同研究として行った。

4. 研究成果

上記の(1)~(5)について以下の結果を得た。

- (1) 空間 2 次元のとき、任意に与えた自然数 k に対して、パラメータを十分大きくすると k 個の正值解が存在することを証明した。また、 k 個の正值解の形状は 1 つの成分関数は単独の方程式のエネルギー最小解に近く、残りの 2 つの成分関数は境界近くに等間隔に 1 から k 個のピークを持つことを証明した。また空間 3 次元のときは、少なくとも 7 個の正值解をもつことも証明した。
- (2) [2]で得たディリクレ境界条件下の正值解はパラメータを十分大きくすると、1 つの成分関数は単独の方程式のエネルギー最小解に近い形状であった。残りの 2 つの成分関数がピークをもつ位置は、エネルギー最小解の境界における法線方向の微分の大きさが最も小さい点であることを証明した。またノイマン境界条件の場合にも、残りの 2 つの成分関数がピークをもつ位置がどのように決まるかも明らかにした。
- (3) パラメータを十分大きくしたとき、1 つの成分関数は単独の方程式のエネルギー最小符号変化解に近い形状をし、残りの 2 つの成分関数は境界近くにピークをもつ正值関数であるような解の存在を証明した。また 1 つの成分関数は単独の方程式のエネルギー最小解に近い形状をし、残りの 2 つの成分関数は符号変化し得る解の多重存在も証明した。
- (4) 空間 3 次元以上のとき、非線形項の値が 0 に近いときと非線形項の値が大きいときだけに仮定をする一般的な非線形項のときの無限個解の存在を証明した。さらに空間 1 次元のとき、ポテンシャル関数の形状によっては非自明解が存在しないことを証明した。
- (5) 非負のポテンシャル関数が 0 に接する場合に、ポテンシャル関数の極小点の近くにピーク解の存在を証明した。さらにそのピーク解の形状についても明らかにした。

引用文献

- [1] T.-C. Lin and J. Wei, Ground state of N coupled nonlinear Schrödinger equations in R^n , $n \geq 3$, Comm. Math. Phys., 255 (2005), 629-653.
- [2] Y. Sato and Z.-Q. Wang, Least energy solutions for nonlinear Schrödinger systems with mixed attractive and repulsive couplings., Adv. Nonlinear Stud. 15 (2015), no. 1, 1-22.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Xiaojun Chang, Yohei Sato	4. 巻 26
2. 論文標題 Localized solutions of nonlinear Schrodinger systems with critical frequency for infinite attractive case	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 online
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00030-019-0578-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yohei Sato, Masataka Shibata	4. 巻 57
2. 論文標題 Infinitely many solutions for a nonlinear Schrödinger equation with general nonlinearity	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1-31
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-018-1413-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yohei Sato	4. 巻 43
2. 論文標題 The existence and non-existence of solutions for the nonlinear Schrödinger equation in one dimension	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis: Real World Applications	6. 最初と最後の頁 477-494
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nonrwa.2018.03.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Jaeyoung Byeon, Yohei Sato, Zhi-Qiang Wang	4. 巻 19
2. 論文標題 Pattern formation via mixed interactions for coupled Schrödinger equations under Neumann boundary condition	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Fixed Point Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 559-583
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11784-016-0365-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jaeyoung Byeon, Yohei Sato, Zhi-Qiang Wang	4. 巻 106
2. 論文標題 Pattern formation via mixed attractive and repulsive interactions for nonlinear Schrödinger systems	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal de Mathematiques Pures et Appliquees	6. 最初と最後の頁 477-511
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://doi.org/10.1016/j.matpur.2016.03.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yohei Sato, Zhi-Qiang Wang	4. 巻 54
2. 論文標題 Multiple positive solutions for Schrödinger systems with mixed couplings	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1373-1392
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-015-0828-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 13件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Yohei Sato
2. 発表標題 Localized solutions of nonlinear Schrödinger systems with critical frequency for infinite attractive case
3. 学会等名 Mini Workshop on Variational Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yohei Sato
2. 発表標題 Localized solutions of nonlinear Schrödinger systems with critical frequency for infinite attractive case
3. 学会等名 Workshop on variational methods and their applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 Sign-changing solutions for a nonlinear elliptic system with mixed couplings
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yohei Sato
2. 発表標題 The sign-changing solutions for a the nonlinear Schrödinger systems with mixed couplings
3. 学会等名 Workshop on nonlinear differential equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 Nonradial solutions for nonlinear Schrödinger systems with strong repulsive interaction
3. 学会等名 第14回非線形偏微分方程式と変分問題
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 Localized solutions of nonlinear Schrödinger systems with critical frequency for infinite attractive case
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yohei Sato
2. 発表標題 Infinitely many solutions for a nonlinear Schrödinger equation with general nonlinearity
3. 学会等名 日中二国間交流セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 遠方で定数に漸近するポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の可算無限個の解の存在
3. 学会等名 応用解析研究会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 定常非線形シュレディンガー方程式のピーク解
3. 学会等名 室蘭工業大学連続講演会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 無限に強い引力効果をもつ非線形シュレディンガー方程式のピーク解
3. 学会等名 第13回非線形偏微分方程式と変分問題
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 Infinitely many solutions for a nonlinear Schrödinger equation with general nonlinearity
3. 学会等名 松山解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 遠方で定数に漸近するポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の可算無限個の解の存在
3. 学会等名 第12回非線形偏微分方程式と変分問題
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 Infinitely many solutions for a nonlinear Schrödinger equation with general nonlinearity
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yohei Sato
2. 発表標題 The positive solutions for the nonlinear Schrödinger systems with mixed couplings
3. 学会等名 Workshop on Nonlinear PDEs and Calculus of Variations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 引力的な項と斥力的な項を含む連立楕円型方程式の解の存在と形状について
3. 学会等名 横浜国立大学における微分方程式微分方程式セミナー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 遠方で定数に漸近するポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の解の存在について
3. 学会等名 第14回浜松偏微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 遠方で定数に漸近するポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の解の存在について
3. 学会等名 第11回非線形偏微分方程式と変分問題
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 引力的・斥力的な項を含むシュレディンガー方程式系の解の存在と形状について
3. 学会等名 第25回南大阪応用数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 引力的な項と斥力的な項を含む非線形シュレディンガー - 方程式系の解の存在と形状について
3. 学会等名 応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Yohei Sato
2. 発表標題 The positive solutions for the nonlinear Schrödinger systems with
3. 学会等名 3rd Chile-Japan Workshop on Nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 佐藤洋平
2. 発表標題 連立楕円型方程式の符号変化する解のエネルギー最小解について
3. 学会等名 第10回非線形偏微分方程式と変分問題
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----