

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：82401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17571

研究課題名(和文) 臨界非線形分散型・波動方程式の未開領域の解明

研究課題名(英文) Study on critical nonlinear dispersive wave equations

研究代表者

池田 正弘 (Ikeda, Masahiro)

国立研究開発法人理化学研究所・革新知能統合研究センター・特別研究員

研究者番号：00749690

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：非線形分散型波動方程式という重要なクラスの微分方程式に対して、初期値問題の適切性と解の長時間挙動の重要未解決問題を解決した。以下の結果は、一流学術雑誌に掲載(確定)された：微分型非線形シュレディンガー方程式系の臨界ソボレフ空間上の適切性と散乱理論、藤田指数を持つ消散型波動方程式の解の爆発時刻の評価、Diracのデルタをポテンシャルに持つ非線形シュレディンガー方程式の解の分類、緩やかに減衰する初期値を持つ消散型波動方程式の臨界指数、時間変数に依存した効果的な摩擦項を持つ非線形波動方程式の解の爆発時刻の評価、スケール臨界な時間変数に依存した摩擦項を持つ波動方程式の解の爆発。

研究成果の概要(英文)：About nonlinear dispersive wave equations, which belong to important class of differential equations, we solved some important open problems about well-posedness of Cauchy problem and asymptotic behavior of solutions to the problem. Especially, the following results are accepted by authorized journals: Well-posedness and scattering of derivative nonlinear Schrödinger system in scaling critical Sobolev spaces, Estimate of lifespan of solutions to nonlinear damped wave equation with Fujita exponent, Classification of solutions to nonlinear Schrödinger equation with a Dirac delta potential, Critical exponent of nonlinear damped wave equation with slowly decaying data, Sharp estimate of lifespan of solutions to nonlinear wave equation with effective time-dependent damping, Small data blow-up of nonlinear wave equation with a time-dependent scaling invariant damping.

研究分野：微分方程式

キーワード：微分方程式 適切性 解の長時間挙動 ソボレフ空間 シュレディンガー方程式 波動方程式 臨界指数 解の爆発

1. 研究開始当初の背景

様々な波動現象の時間発展は、その本質的な部分を抽出することにより、非線形分散型波動方程式の解に近似される。その方程式の代表例は、物理学の様々なところで登場する非線形シュレディンガー方程式や非線形 Klein-Gordon 方程式である。しかし、非線形偏微分方程式には、解の表示が存在しないので、時間局所的に定義される解の存在さえ明らかではない。自然現象を記述する方程式は、しばしば、臨界状態にある。臨界状態とは、方程式の線形部分に由来する分散性と非線形項から来る非線形性が釣り合う状況のことを言い、この状態の問題の解の存在やその性質を調べるためには、独創的発想と膨大な計算をやりきる忍耐力を必要とする。エネルギー臨界冪の集約的な非線形項を持つシュレディンガー方程式の解の挙動の分類を始めとして、非線形分散型波動方程式の臨界問題には重要な問題が未解決のままであるので、それを解決することが本研究の内容である。

2. 研究の目的

自然現象を記述する臨界非線形分散型波動方程式の初期値問題の適切性と解の性質に関する未解決問題を解決する。

3. 研究の方法

非線形偏微分方程式の初期値問題の局所適切性を示す。そのために、適切な完備距離空間を設定して、微分方程式に対応する積分方程式を縮小写像の原理を用いて不動点を見つける。その鍵となる分散型評価、Strichartz 評価、加藤型の平滑化効果、Maximal function estimate, bilinear Strichartz 評価、Littlewood-Paley 理論を駆使した非線形評価を示す。局所適切性に加えて、解の先験評価式を導出して、解の時間大域的な存在を示す。ガリレイ変換の生成作用素等を用いた可換ベクトル場法を用いて先験評価の導出を試みる。Kenig-Merle 型の議論を用いて、初期値に対する小ささの制限の緩和を試みる。そのために、Linear Profile Decomposition, Perturbation Lemma, Nonlinear Profiles, Construction of a critical element, Rigidity 等を示す。線形ポテンシャルを持つ方程式を扱うために、Distorted Fourier 変換、レゾルベント評価式を用いる。

4. 研究成果

(1) 消散項と冪型非線形項を持つ波動方程式の初期値問題の小さな初期値に対する解の爆発時刻を評価した。非線形項の次数が藤田指数かつ 4 次元以上の場合、解の爆発時刻の上からの評価は長い間の未解決問題であった。私は、小川氏と共同で、従来の試験関数法をより精密にすることによりこの問題を解決した。さらに、爆発時刻の下からの最

適な評価も導出した【論文 10】。

(2) 岸本氏と岡本氏と共同で、微分型非線形シュレディンガー方程式系の適切性と解の長時間挙動を研究した。この系に対して、質量が共鳴条件、非線形項が零条件というある代数構造条件を満たすとき、Bourgain 空間を精密化した U^p, V^p 空間空間とその性質等を用いて、先行研究より十分に広い自然な臨界ソボレフ空間の枠組みで初期値問題の適切性と解の自由解への漸近を示した【論文 9】。

(3) 成亥と共同で、絶対値 p 乗の非線形項と消散項を持つ Klein-Gordon 方程式の初期値問題の局所解の存在と大域解の存在を研究した。これらの問題に対して、従来の試験関数法を修正して適用することにより、非線形項の次数がエネルギー臨界及びエネルギー劣臨界の場合に、大きな初期値に対する大域解の非存在を示した。さらに、次数がエネルギー超臨界の場合に局所解の非存在の結果を得た。局所解の非存在の結果は、偏微分方程式の研究において稀有なものであり興味深い【論文 8】。

(4) Dirac の δ 関数を反発的な線形ポテンシャルに、集約的に働く質量超臨界の冪型非線形項を持つシュレディンガー方程式の初期値問題の解の挙動を研究した。非線形項も反発的に働く場合、Banica-Vsciglia は 2016 年にすべてのエネルギー有限な解が線形解に漸近すること示した。しかし、非線形項が集約的に働く場合、爆発解と定在波解という解の存在が知られており、解の挙動を捉えること困難である。私は、成亥と共同で、線形ポテンシャルのない非線形シュレディンガー方程式の基底状態解未満の質量-エネルギーを持つ解の挙動を Virial 等式と関連のある汎関数の正負で解が線形解に漸近するか、有限時刻あるいは無限時刻で爆発するかのいずれかになることを示した。さらに、初期値が偶関数という対称性を持つ場合、その基底状態解の 2 倍程度の質量-エネルギー未満の解に対して同様の結果を示した【論文 7】。

(5) Dirac の δ 関数を反発的な線形ポテンシャルに、消散的長距離効果を持つ冪型非線形項を持つシュレディンガー方程式の最終値問題を研究した。線形ポテンシャルと長距離型非線形項を持つ方程式の研究は、極めて少ない。それは、非線形構造を考慮に入れる必要があることと Fourier 変換が機能しないことに起因する。そこで、Distorted Fourier 変換を用いた適切な近似解と Distorted Fourier 変換の性質を用いて、適切な重み付き Sobolev 空間に属する任意の初期値に対して、修正された線形解に漸近する大域解の存在と L^2 ノルムの減衰を示した【論文 6】。

(6) 戌亥氏と若杉氏と共同で、冪型非線形項を持つ消散型波動方程式に対して L^1 よりも空間遠方で遅く減衰する初期値を持つ初期値問題の解の存在・非存在と大域解の長時間挙動を研究した。初期値が L^1 より早く減衰する場合、解の存在等を調べた研究は多くある。しかし、 L^1 より遅い初期値を持つそれらの研究は極めて少ない。我々は、重み付き Sobolev 空間の枠組みで、局所適切性、大域適切性、解の長時間挙動を示した。さらに大域解の存在と非存在を分ける臨界指数を発見した【論文 5】。

(7) 藤原氏と若杉氏と共同で、弱連立系複素ギンツブルグランダウ方程式の小さな初期値に対する解の爆発を研究した。この方程式に、従来の試験関数法を適用することにより、非線形項の次数が、藤田臨界及び劣臨界の場合に、小さな初期値に対する爆発解の存在がわかる。しかし、その方法では、爆発解の爆発の仕組みを理解することは困難である。そこで、解の重み付き平均が満たす常微分不等式系に注目して、それらの 1 本化を行うことで、藤田劣臨界の場合に、小さな初期値に対する解の爆発の結果を得た【論文 4】。

(8) 藤原氏と若杉氏と共同で、消散項を持つ波動方程式で、消散項が効果的に働く場合の冪型非線形問題の解の爆発を研究した。2012年に Lin-Nishihara-Zhai は、消散項が効果的に働く 1 部の場合に、大域解の存在と非存在を分ける臨界指数が藤田指数で与えられることを示した。しかし、解の爆発時刻の評価やその他の効果的に働く場合の臨界指数は未解決であった。我々は、Scaling variables の方法を用いて、効果的に働くすべての場合で、非線形項の次数が藤田臨界指数以下の場合に、爆発時刻の下からの最良な評価を導出した。さらに、常微分不等式の解の爆発に帰着させることで、藤田劣臨界の場合に、爆発時刻の上からの最良な評価を導出した【論文 3】。

(9) 側島氏と共同で、時間変数に依存したスケール不変な摩擦項と絶対値 p 乗の非線形項を持つ波動方程式の解の爆発を研究した。この場合は、摩擦項の係数が臨界指数に影響を与える繊細な状況であることが知られている。我々は、2014年の Zhou-Han の超幾何関数を試験関数に用いた試験関数法を拡張及び改良することで、先行結果よりも広い、藤田指数より大きく修正された Strauss 指数以下の場合に、小さな初期値に対する解の爆発を示した。さらに、修正された Strauss 指数の場合には、摩擦項のない場合の結果を含んだ爆発時刻の上からの評価を導出した【論文 2】。

(10) 戌亥氏と共同で、時間変数に依存した効果的に働く摩擦項と藤田指数を持つ波動方程式の解の爆発を研究した。摩擦項が効果的に働く場合の解の存在は盛んに研究された。しかし、藤田指数の場合だけ、解が大域的に延長されるか否かが未解決であった。我々は、最近の Lai-Zhou の論文の手法を訂正、改良することで、小さな初期値に対する解の爆発と爆発時刻の最適な評価を示した【論文 1】。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

(1) Masahiro Ikeda, Takahisa Inui, ***The sharp estimate of the lifespan for the semilinear wave equation with time-dependent damping***, to appear in *Differential and Integral Equations*, 印刷中, 査読有り.

(2) Masahiro Ikeda, Motohiro Sobajima, ***Life-span of solutions to semilinear wave equation with time-dependent critical damping for specially localized initial data***, to appear in *Mathematische Annalen*, 印刷中, 査読有り.

(3) Kazumasa Fujiwara, Masahiro Ikeda, Yuta Wakasugi, ***Estimate of lifespan and blow-up rates for the semilinear wave equation with time-dependent damping and subcritical nonlinearities***, to appear in *Funkcialaj Ekvacioj*, 印刷中, 査読有り.

(4) Kazumasa Fujiwara, Masahiro Ikeda, Yuta Wakasugi, ***Blow-up of solutions for weakly coupled system of complex Ginzburg-Landau equations***, *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2017, (2017), no.196, 1-18, 査読有り.

(5) Masahiro Ikeda, Takahisa Inui, Yuta Wakasugi, ***The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data***, to appear in *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 印刷中, 査読有り.

(6) Masahiro Ikeda, ***Asymptotics for the Schrödinger equation with a repulsive delta potential and a long-range dissipative nonlinearity***, to appear in the proceedings of the conference "Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations", 印刷中, 査読有り.

(7) Masahiro Ikeda, Takahisa Inui, **Global dynamics below the standing waves for a focusing nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential**, Analysis and PDE., vol.10, (2017), no.2, 481-512, 査読有り.

(8) Masahiro Ikeda, Takahisa Inui, **A remark on non-existence results for the semi-linear damped Klein-Gordon equations**, RIMS K^oky^uroku Bessatsu vol. B56 (2016), 11-30, 査読有り.

(9) Masahiro Ikeda, Nobu Kishimoto, Mamoru Okamoto, **Well-posedness for a quadratic derivative nonlinear Schrödinger system at the critical regularity**, Journal of Functional Analysis, vol. 271, (2016), 747-798, 査読有り.

(10) Masahiro Ikeda, Takayoshi Ogawa, **Lifespan of solutions to the damped wave equation with a critical nonlinearity**, Journal of Differential Equations, vol. 261, (2016), 1880-1903, 査読有り.

[学会発表](計 29 件)

(1) 池田 正弘, **Lifespan of solutions to semilinear wave equation with time-dependent critical damping**, 神楽坂非線形波動研究会, 東京理科大学神楽坂キャンパス, 2018 年 3 月.

(2) 池田 正弘, 戌亥 隆恭, 岡本 葵, 若杉 勇太, **線形消散型波動方程式の解の時間減衰評価, 可積分でない初期値を持つ非線形問題の臨界指数**, 2018 年日本数学会年会, 東京大学, 2018 年 3 月.

(3) 池田 正弘, 側島 基宏, **Life-span of solutions to semilinear wave equation with space-dependent critical damping**, 2018 年日本数学会年会, 東京大学, 2018 年 3 月.

(4) 池田 正弘, 側島 基宏, **Life-span of solutions to semilinear wave equation with time-dependent critical damping**, 2018 年日本数学会年会, 東京大学, 2018 年 3 月.

(5) Masahiro Ikeda, **Lifespan of blow-up solutions to semi linear wave equation with space-dependent critical damping**, Taiwan-Japan Workshop on Dispersion, Navier Stokes, Kinetic, and Inverse Problems, Department of Mathematics, National Cheng Kung University, 2017 年 12 月.

(6) 池田 正弘, **時間変数に依存するスケール臨界な摩擦項を持つ非線形波動方程式の解の爆発**, 京都大学 NLPDE セミナー, 京都大学, 2017 年 12 月.

(7) 池田 正弘, **Upper bound for lifespan of solutions to certain semilinear parabolic, dispersive and hyperbolic equations via a unified test function method**, 数理生物学・現象数学ワークショップ, 松江テルサ, 2017 年 11 月.

(8) Masahiro Ikeda, **Global dynamics below the ground state for the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential**, Hausdorff School: Dispersive Equations, Solitons, and Blow-up, Hausdorff center for Mathematics, 2017 年 9 月.

(9) Masahiro Ikeda, **Global dynamics below the ground state for the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential**, ISAAC2017, Linnaeus University, 2017 年 8 月.

(10) 池田 正弘, **ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式の解の大域ダイナミクスについて**, 談話会, 慶応義塾大学矢上キャンパス, 2017 年 8 月.

(11) 池田 正弘, **Scattering below a ground state for NLS with a potential in 1d**, 埼玉解析ゼミ, 埼玉大学, 2017 年 7 月.

(12) 池田 正弘, **Global dynamics below the ground state for the nonlinear Schrödinger equations with a potential**, 談話会, 東京理科大学野田キャンパス, 2017 年 6 月.

(13) 池田 正弘, **Global dynamics below the ground state for the nonlinear Schrödinger equations with a potential**, 応用解析研究会, 早稲田大学西早稲田キャンパス, 2017 年 6 月.

(14) 池田 正弘, **Global dynamics below the ground state for the nonlinear Schrödinger equations with a repulsive potential**, 神楽坂解析セミナー, 東京理科大学神楽坂キャンパス, 2017 年 5 月.

(15) 池田 正弘, **Global dynamics below the ground state for the nonlinear Schrödinger equations with a repulsive potential**, 名古屋微分方程式セミナー, 名古屋大学大学院多元数理学研究科, 2017 年 5 月.

(16) 池田 正弘, **Global dynamics of solutions below a ground state for the**

nonlinear Schrödinger equation with a repulsive potential, Seminar on Nonlinear Analysis at O-okayama, 東工大大岡山キャンパス, 2017 年 4 月.

(17) 池田 正弘, **Sharp Lifespan Estimates and Blow-up Rates for the Semilinear Wave Equation with Time-Dependent Damping and Subcritical Nonlinearities**, 2016 Taiwan-Japan Workshop on Dispersion, Navier Stokes, Kinetic, and Inverse Problems, National Cheng Kung University, 2016 年 12 月.

(18) 池田 正弘, **Sharp estimate of lifespan and blow-up rate of solutions to the damped wave equation**, 第 6 回弘前非線形方程式研究会, 弘前大学 50 周年記念会館 岩木ホール, 2016 年 12 月.

(19) 池田 正弘, **ディラックのデルタ関数をポテンシャルに持つ非線形シュレディンガー方程式の解の分類について**, 談話会, 名古屋大学多元数理研究科, 2016 年 12 月.

(20) 池田 正弘, 戌亥 隆恭, 若杉 勇太, **The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data**, 日本数学会秋季総合分科会, 関西大学, 2016 年 9 月.

(21) 池田 正弘, **Lifespan of solutions to the damped wave equation with the Fujita exponent**, Seminar on Nonlinear Wave Equations in Hakodate, 公立はこだて未来大学, 2016 年 8 月.

(22) 池田 正弘, **ディラックのデルタ関数をポテンシャルに持つ非線形シュレディンガー方程式の解の分類について**, 線形及び非線形分散型方程式に関する最近の進展, 京都大学, 2016 年 5 月.

(23) 池田 正弘, **ディラックのデルタ関数をポテンシャルに持つ非線形シュレディンガー方程式の解の分類について**, HMA seminar, 広島大学, 2016 年 4 月.

(24) 池田 正弘, 戌亥 隆恭, Dirac のデルタ関をポテンシャルに持つ非線形シュレディンガー方程式の解の分類について, 日本数学会年会, 筑波大学, 2016 年 3 月.

(25) 池田 正弘, **ディラックのデルタ関数をポテンシャルに持つ非線形シュレディンガー方程式の解の分類について**, 数理モデルにおける非線型消散・分散構造の臨界性の未開領域解明, 東北大学, 2016 年 1 月.

(26) 池田 正弘, **Global dynamics below the ground state for the mass-supercritical focusing nonlinear Schrödinger equation with a repulsive delta potential**, 第 9 回実解析と関数解析による微分方程式セミナー, ヒルズサンピア山形, 2015 年 12 月.

(27) 池田 正弘, **Global dynamics for the focusing nonlinear Schrödinger equation with a repulsive delta potential in the mass-supercritical case**, 微分方程式の総合的研究, 東京大学, 2015 年 12 月.

(28) Masahiro Ikeda, **Global dynamics below the ground state for the nonlinear Schrödinger equation with a repulsive potential**, Probabilistic perspectives in nonlinear PDEs, International Centre for Mathematical Sciences, 2017 年 6 月.

(29) 池田 正弘, **Estimate on the lifespan of solutions to the damped wave equation with a critical nonlinearity**, The 3rd CAU-Kyoto U. Joint Workshop on Nonlinear PDEs, Seo-gwi-po KAL hotel, Jeju-do, Korea, 2015 年 9 月.

[その他]
ホームページ等
<https://sites.google.com/site/masahiroikedamath/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者
池田 正弘 (Masahiro Ikeda)
国立研究開発法人理化学研究所・革新知能統合研究センター・特別研究員
研究者番号: 00749690