

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 4 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17572

研究課題名(和文) Boltzmann方程式の解の境界近傍での特異性解析

研究課題名(英文) Singularity Analysis of Solutions to the Boltzmann Equation near the Boundary

研究代表者

陳 逸昆 (Chen, I-Kun)

京都大学・情報学研究科・特定講師

研究者番号：10748833

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：定常 Boltzmann 方程式の境界値問題の解の、境界近傍における特異性および領域内における正則性をいくつか明らかにした。Boltzmann 方程式は希薄気体分子の運動を記述するもので、本研究の結果は原子炉や航空機の設計に資すると考えている。また、同様の方程式である定常輸送方程式に対して、境界値から派生する解の不連続性を記述することに成功した。この結果は、近赤外光を利用した次世代の生体断層撮影技術である拡散ひかりトモグラフィに応用されると期待される。

研究成果の概要(英文)：We have shown some regularity issues of solutions to boundary value problems of the stationary Boltzmann equation, in particular singularity near the boundary and regularity inside the domain. The Boltzmann equation describes the motion of dilute gas molecule, and we consider that the results of this study will contribute to the design of nuclear reactors and aircraft.

We also considered the boundary value problem of the stationary transport equation, which is a similar equation to the stationary linearized Boltzmann equation, and succeeded in describing the discontinuity of the solution arising from discontinuous boundary data. This result is expected to be applied to the Diffused Optical Tomography, which is the next generation medical imaging technology using near infrared light.

研究分野：Kinetic Theory

キーワード：偏微分方程式 境界値問題 Kinetic Theory 特異性 Boltzman 方程式

## 1. 研究開始当初の背景

定常 Boltzmann 方程式の境界値問題における解の特異性、すなわち(1)領域の形状から派生する解の特異性、と(2)境界値から派生する解の不連続性、についてそれぞれ研究の背景を概説する。

(1)定常 Boltzmann 方程式は非線型偏微分積分方程式に分類されるが、その非線型性が弱い場合あるいは線型化した場合について、凸領域では Guiraud(1972) によって、非凸領域では Esposito, Guo, Kim, and Marra (2013) によって、それぞれ解の存在およびその正則性が研究されていた。特に Espositoらの先行研究では、grazing set と呼ばれる境界の部分集合から離れたところでは、解が連続になることが知られていた。

この grazing set は領域が非凸の場合のほうが凸の場合よりも多く現れ、時間依存の Boltzmann 方程式に対しては、領域の非凸性から解の不連続性が生じることが Kim(2011) により知られていた。このことから、時間依存の Boltzmann 方程式の解が連続になることは期待できないものの、Guo, Kim, Tonon, and Trescases (2016) は解が有界変動であることを証明した。さらに彼らは、解の不連続性が生じない場合である凸領域で解の正則性を議論し、重み付の解の  $C^1$  評価を導出した。

しかし、この重みは時間変数に依存するため、同様の手法で定常 Boltzmann 方程式の解の正則性を議論することはできなかった。

(2)境界値から派生する解の不連続性の研究は、近赤外光を利用する次世代の生体断層撮影技術である拡散ひかりトモグラフィの実現と関連している。

近赤外光の伝播を記述する数理モデルに輸送方程式と呼ばれる微分積分方程式が用いられ、生体の光学特性の変化は光の伝播に比べて極めて遅いため、特に生体内では定常輸送方程式が用いられる。定常輸送方程式の係数は生体の光学特性を記述するものであるから、数学的には拡散ひかりトモグラフィを定常輸送方程式の係数決定逆問題と位置づけることができる。この定常輸送方程式は定常線型 Boltzmann 方程式と同様の形をしているため、本研究と関連していると判断した。

Anikonov, Prokhorov, and Kovtanyuk(1993) は、境界値が速度変数について第一種の不連続性を持つ場合における、定常輸送方程式の解の不連続性を定性的かつ定量的に議論し、この結果を方程式の係数決定逆問題に応用する方法を提案した。一方、境界値が空間変数について不連続性を持つ場合の解の不連続性の議論については、Aoki, Bardos, Dogbe, and Golse(2001) により、ごく簡単な場合にのみ同様の結果が知られていた。

## 2. 研究の目的

上述の2つの背景から、研究の目的を以下のとおり設定した。

(1)領域の境界近傍における定常 Boltzmann 方程式の解の特異性を精査すること。

(2)境界値から派生する、定常輸送方程式の解の不連続性を議論することにより、新たな係数決定法を提案すること。

## 3. 研究の方法

定常 Boltzmann 方程式の解の正則性を研究するにあたり、時間依存の場合の解析手法を参考にした。それは mixture lemma や velocity averaging lemma と呼ばれるもので、速度変数に関する解の正則性を利用して空間変数に関する解の正則性を良くするものである。

これらの手法は方程式の領域が全空間の場合にのみ知られており、本研究の対象である有界領域でかつ定常の場合に同様の性質が得られるかは非自明であった。すなわち、定常方程式を考えた場合、我々の結果が本手法を適用した初めての結果である。

時間依存の方程式を考えた場合、mixture lemma や velocity averaging lemma は Fourier 変換を利用して証明される。一方、本研究の設定では Fourier 変換を適用できない。本研究では積分項に適当な変数変換を施すことにより、速度変数の正則性を空間変数の正則性に移すことに成功した。この結果により、定常 Boltzmann 方程式のモーメント量の境界近傍における特異性を記述することに成功した。またこの結果により、定常輸送方程式の解の境界値から派生する正則性を議論することに成功した。

## 4. 研究成果

本研究で得られた成果を4件、雑誌論文として報告した。以下、それぞれの論文で報告した結果を概説する。

① "Regularity of stationary solutions to the linearized Boltzmann equations" では、3次元の有界  $C^1$  級凸領域で定常線型 Boltzmann 方程式を考え、それに入射境界条件を課した境界値問題を考える。積分核については、cutoff hard potential または cutoff Maxwellian potential を仮定する。このとき、この境界値問題の解は境界から離れた点では  $1/2$  ヘルダー連続になることを証明した。grazing set の存在から、境界まで込めたヘルダー評価が成り立たないことに注意する。

② "Propagation of Boundary-Induced Discontinuity in Stationary Radiative Transfer" では、一般次元の帯状領域に

において入射境界条件を課した定常輸送方程式の境界値問題を考え、特に解の不連続性と境界値の不連続性との対応を明らかにした。

- ③ “Singularity of the velocity distribution function in molecular velocity space” では、3次元帯状領域で拡散反射境界条件を与えた定常 Boltzmann 方程式を考え、境界上における解の速度変数についての不連続性を考察した。また、速度変数についての偏導関数も境界上で log オーダーの特異性を持つことを漸近展開により確認した。
- ④ “Singularity of macroscopic variables near boundary for gases with cutoff hard potential” では、3次元帯状領域で定常 Boltzmann 方程式の境界値問題を考え、モーメント量の観点から解の境界近傍での特異性を考察した。

また、以下の2点も本研究で得られた成果であるが、これらは現在雑誌に投稿中である。

- ⑤ “Regularity for diffuse reflection boundary problem to the stationary linearized Boltzmann equation in a convex domain” では、3次元の有界  $C^2$  級狭義凸領域で定常線型 Boltzmann 方程式を考え、それに拡散反射境界条件を課した境界値問題を考える。積分核については、hard sphere potential, cutoff hard potential, or cutoff Maxwellian potential を仮定する。以上の設定の下で、この境界値問題の解が偏微分可能であることを示し、偏導関数の各点評価を与えた。この結果は①で得られた結果を改良したものになっている。
- ⑥ “Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer and its application to the optical tomography” では、②で得られた結果が2または3次元の有界凸領域でも成り立つことを証明し、その結果を利用して定常輸送方程式の係数決定逆問題の部分的解法を提案した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① I-Kun Chen, Regularity of stationary solutions to the linearized Boltzmann equations. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 査読有, Vol. 50, No. 1, 2018, pp.138-161

- ② Daisuke Kawagoe, I-Kun Chen, Propagation of Boundary-Induced Discontinuity in Stationary Radiative Transfer. Journal of Statistical Physics, 査読有, Vol. 170, No. 1, 2018, pp.127-140
- ③ I-Kun Chen, Hitoshi Funagane, Tai-Ping Liu, Shigeru Takata, Singularity of the velocity distribution function in molecular velocity space, Communication in Mathematical Physics, 査読有, Vol. 341, No. 1, 2016, pp. 105-134
- ④ I-Kun Chen, Chun-Hsiung Hsia, Singularity of macroscopic variables near boundary for gases with cutoff hard potential, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 査読有, Vol. 47, No. 6, 2015, pp. 4332-4349

[学会発表] (計 26 件)

- ① I-Kun Chen, “On boundary singularity in kinetic theory”, NLPDE セミナー, 2015
- ② I-Kun Chen, “On boundary singularity in kinetic theory”, 九州関数方程式セミナー, 2015
- ③ I-Kun Chen, “On boundary singularity in kinetic theory”, Colloquium in National Cheng Kung University, 2015
- ④ I-Kun Chen, “On boundary singularity in kinetic theory”, 非線形解析セミナー @大岡山, 2015
- ⑤ I-Kun Chen, “Regularity of solutions to the linearized stationary Boltzmann equations”, Taiwan-Japan joint workshop on inverse problem, 2016
- ⑥ I-Kun Chen, “Regularity of thermal non-equilibrium stationary solutions to the linearized Boltzmann equations”, NLPDE セミナー, 2016
- ⑦ I-Kun Chen, “Regularity of stationary solutions to the linearized Boltzmann equations”, RIMS 研究集会 流体と気体の数学解析, 2016
- ⑧ I-Kun Chen, “Regularity of stationary solutions to the linearized Boltzmann equations”, Colloquium in National Cheng Kung University, 2016
- ⑨ I-Kun Chen, “Regularity of stationary solutions to the linearized Boltzmann

- equations”, One-day workshop on kinetic theory, 2016
- ⑩ I-Kun Chen, “Regularity of stationary solution to the linearized Boltzmann equation”, 名古屋微分方程式セミナー, 2016
- ⑪ I-Kun Chen, “Regularity of stationary solutions to the linearized Boltzmann equations”, 2016 Taiwan-Japan workshop on dispersion, Navier Stokes, kinetic, and inverse problem, 2016
- ⑫ I-Kun Chen, “Regularity of stationary solutions to the linearized Boltzmann equations”, Colloquium in National Central University, Taiwan, 2017
- ⑬ I-Kun Chen, “Regularity of stationary solutions to the linearized Boltzmann equations”, NTU Mathematics Colloquium, 2017
- ⑭ I-Kun Chen, “Regularity of solutions to the stationary linearized Boltzmann equation”, The 25th annual workshop on differential equations, 2017
- ⑮ I-Kun Chen, “Singularity and regularity for the stationary solutions to linearized Boltzmann equations”, Diff. Geom., Math. Phys., PDE Seminar in Pacific Institute for the Mathematical Sciences, 2017
- ⑯ I-Kun Chen, “Singularity and regularity of the stationary solution to linearized Boltzmann equations”, NTU Mathematics Colloquium, 2017
- ⑰ I-Kun Chen, “Singularity and regularity of the stationary solution to linearized Boltzmann equations”, Colloquium in National Cheng Kung University, 2017
- ⑱ I-Kun Chen, “Singularity and regularity of the stationary solution to linearized Boltzmann equations”, Colloquium in National Tsing Hua University, 2017
- ⑲ I-Kun Chen, “Regularity for diffuse reflection boundary problem to the stationary linearized Boltzmann equation in a convex domain”, 非線形解析セミナー@大岡山, 2017
- ⑳ I-Kun Chen, “Regularity for diffuse reflection boundary problem to the stationary linearized Boltzmann equation in a convex domain”, Nagoya Institute of Technology, 2017
- 21 I-Kun Chen, “Regularity for diffuse reflection boundary problem to the stationary linearized Boltzmann equation in a convex domain”, International Conference on Nonlinear Analysis: Kinetic Theory, Gas Dynamics, and Related Fields, 2017
- 22 I-Kun Chen, “Regularity for diffuse reflection boundary problem to the stationary linearized Boltzmann equation in a convex domain”, 2017 Taiwan Mathematical Society Annual meeting, 2017
- 23 I-Kun Chen, “Regularity for diffuse reflection boundary problem to the stationary linearized Boltzmann equation in a convex domain”, Department of Mathematics, Tokyo University, 2017
- 24 I-Kun Chen, “Regularity for diffuse reflection boundary problem to the stationary linearized Boltzmann equation in a convex domain”, 2017 Taiwan-Japan Workshop on Dispersion, Navier Stokes, Kinetic, and Inverse Problems, 2017
- 25 I-Kun Chen, “Regularity for diffuse reflection boundary problem to the stationary linearized Boltzmann equation in a convex domain” 26th Annual Meeting on Differential Equations and Related Topics, 2018
- 26 I-Kun Chen, “Regularity for diffuse reflection boundary problem to the stationary linearized Boltzmann equation in a convex domain”, 数値解析・応用解析セミナー, 2018
6. 研究組織
- (1) 研究代表者  
陳逸昆 (CHEN, I-Kun)  
京都大学大学院情報学研究所・特定講師  
研究者番号：10748833
- (2) 研究分担者  
該当者なし
- (3) 連携研究者  
該当者なし

(4) 研究協力者

夏 俊雄 (HSIA, Chun-Hsiung)

劉 太平 (LIU, Tai-Ping)

高田 滋 (TAKATA, Shigeru)

舟金 仁志 (FUNAGANE, Hitoshi)

川越 大輔 (KAWAGOE, Daisuke)