

令和元年6月18日現在

機関番号：13801

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17573

研究課題名(和文) 種々の非線形性を持つ拡散方程式の解の挙動

研究課題名(英文) Behavior of solutions for various nonlinear diffusion equations

研究代表者

藤嶋 陽平 (Fujishima, Yohei)

静岡大学・工学部・准教授

研究者番号：70632628

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：反応拡散方程式の一つである非線形熱方程式に対する可解性を考察し、初期状態を記述する関数が与えられた際に方程式の解が存在するのかを考察した。特に、非線形項を特定の形に限定せず、一般の非線形熱方程式に対する解析を行い、時間局所解が存在するための最適な初期関数の可積分性を導出することができた。さらには、指数型非線形熱方程式を考察し、時間大域解が存在するための初期関数の最適な条件を導くことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、自己相似性と呼ばれる数学的構造が存在しない非線形熱方程式を扱い、その可解性を考察した。本研究で用いた議論は、自己相似変換と呼ばれる自己相似性に基づく変換を一般化することで行われた。この一般化により、既存の研究では扱うことが難しい、自己相似性を持たない方程式に対しても可解性を考察することが可能となり、解析対象が大幅に広がった。可解性に限らず、解の挙動など、これまでの自己相似性に基づく様々な議論を一般化することができる可能性があり、今後の研究の進展が期待される。

研究成果の概要(英文)：We consider a nonlinear heat equation, which is an example of reaction-diffusion equations, and studied the solvability of the initial-value problem. In particular, we treated a nonlinear term which we do not assume a specific form, and derived the optimal integrability of initial function for the local in time existence of solutions. Furthermore, we also considered the heat equation with exponential nonlinearity, and obtained the optimal decay rate of initial function for global in time existence of solutions.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形熱方程式 自己相似性 準スケール変換 可解性 前方自己相似解

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

非線形熱方程式は、固体燃料の燃焼モデルなど、化学反応による発熱の温度分布を調べる際に現れる。非線形熱方程式は反応項から生じる非線形項と拡散項から生じる線形項のバランスによって、その解の振る舞いは様々な様相を呈する。特に既存の研究では、べき乗型非線形項や指数型非線形項などの綺麗な数学的構造を有する方程式を扱われることが多く、これら以外の一般の非線形項を扱うことが困難である状況がしばしば生じる。一般の非線形熱方程式を考察した場合に、解の挙動にどのような変化が起こるのか？という疑問が生じる。非線形熱方程式の解の挙動は、拡散項と非線形項のバランスの影響を強く受けるため、非線形項の違いが解の振る舞いを大きく変える。

### 2. 研究の目的

非線形熱方程式の解の挙動や形状を調べることが本研究の目的である。一般の非線形性を有する方程式を考察し、非線形性の違いが方程式およびその解にどのような影響を与えるかを調べる。特に「与えられた初期値に対して方程式の解は存在するのか？」という基本的でありながら、方程式の特性が集約される問題を研究の対象とする。方程式の可解性の問題を通して、拡散項と非線形項のバランスが非線形熱方程式の性質にどのような影響を与えるのかを明らかにする。また、指数型非線形項など増大度の強さが解の挙動に与える影響も明らかにする。本研究で扱う主な研究対象は、

- 一般の非線形熱方程式の時間局所および時間大域可解性
- 指数型非線形熱方程式に対する前方自己相似解の解構造とその時間大域可解性への応用である。さらには上記の研究を踏まえて、爆発問題への応用についても考察する。これらの問題に対する解析を進めることで、非線形性が解の挙動に与える影響を明らかにすることが研究目的であった。

(1) 非有界な初期値が与えられたとき、方程式に解が存在するか否かについては、方程式の拡散項と非線形項のバランスや初期値の特異性の強さにより決定され、方程式の特性が顕著に現れる。べき乗型非線形項のように非線形項の増大度が明確に与えられている場合には、既存の研究により特異な初期値に対する可解性は既に特徴付けされている。本研究では、一般の非線形項に対して、その増大度から定まる量を用いて、解が存在するための臨界の初期値の可積分性を導出する。さらには時間大域可解性についても考察し、非線形項の挙動と初期値の空間減衰の関係を明らかにする。

(2) 指数型非線形熱方程式に対しては、前方自己相似解と呼ばれる、方程式のスケール不変性に基づく解の構造を調べる。前方自己相似解は非線形熱方程式の時間大域的な特殊解であり、拡散項と非線形項の釣り合いにより定まる解である。指数型非線形項のように、強い増大度を持つ非線形項を扱うことで、その増大度の強さが解の挙動に与える影響を調べる。また、前方自己解の解構造を明らかにした上で、これらの性質を用いて、時間大域解の存在と、初期値の空間無限遠方での挙動の関係を明らかにする。

### 3. 研究の方法

非線形熱方程式の可解性については、Weissler によるべき乗型非線形熱方程式に対する研究がよく知られており、解の存在・非存在を分ける臨界の初期値の可積分性が、方程式の自己相似性により特徴付けされる。べき乗型方程式の自己相似性とは、方程式を不変にするスケール変換が存在することであり、可解性のための初期値の最適な可積分性はこのスケール変換のもとで不変な空間から定まるといふ、いわゆる藤田・加藤の原理が成立している。ところが、一般の非線形熱方程式を考えた場合には、このようなスケール不変性は期待できず、スケール不変性に基づく時間局所解の存在のための最適な初期値の可積分性を導くことが不可能となる。

本研究では、研究代表者が導入した、べき乗型方程式に対するスケール変換の一般化(準スケール変換)に基づき、時間局所解の存在のための最適な可積分性を予想する。方程式の自己相似性が一般には成立しないが、準スケール変換のもとで不変な積分量を導出することが可能であり、その不変な積分量が局所解の存在・非存在を分ける臨界の可積分性を与えることを示す。特に解の存在を示すためには、適切な優解の構成が必要となるが、そのような優解を準スケール変換に基づき構成する。

指数型非線形熱方程式に対しては、前方自己相似解の存在を考察し、その挙動や性質を調べる。前方自己相似解を得ることができれば、初期値と比較することで、解が時間大域的に存在するための最適な初期値の減衰オーダーを導出することができる。

### 4. 研究成果

当初の目標としていた

- 一般の非線形熱方程式の時間局所および時間大域可解性
- 指数型非線形熱方程式に対する前方自己相似解の解構造とその時間大域可解性への応用については、概ね満足のできる結果を得ることができた。一般の非線形熱方程式に対する時間局所解の存在・非存在についての結果および、指数型非線形熱方程式に対する自己相似解の構

造の解明とその時間大域可解性への応用についてはその結果をまとめ、学術論文として査読有国際雑誌に掲載されている。一般の非線形熱方程式の時間大域可解性についても、非線形項に対するある仮定のもと証明することはできた。これにより典型的な例の非線形項を扱うことは可能となったが、さらなる改良が可能であると思われるため、引き続き研究を深めていく予定である。

一般の非線形熱方程式に対する研究では、上記の「研究の方法」で述べた、準スケール変換に基づく解析が可能となった。特に方程式の自己相似性の礎となる関数を導入することができ、その関数の性質を調べることで、可解性の議論を進展させることができた。

指数型非線形熱方程式に対する研究では、前方自己相似解の存在やその挙動について十分に解析することに成功し、得られた挙動をもとに初期値との比較を行い、時間大域解が存在するための最適な空間減衰を導出することができた。

上記の二つの研究については概ね当初の予定通りに研究を進めることができた。また、これらの解析で培った解析技術を基に、非線形熱方程式の爆発問題にも取り組み、べき乗型非線形熱方程式に対する解析を行った。これまでの研究で、拡散係数が十分に小さい場合に解が爆発する場所、すなわち、解の爆発集合の位置の特徴づけを行ってきており、既に初期値の最大点付近での形状が関係していることを示していた。本研究課題で行った研究では、初期値の最大点付近の更に高階の微分の効果まで取り入れた爆発集合の特徴付けに成功した。これにより、拡散係数が十分に小さい場合の爆発集合の特徴付けについては、多少の仮定はあるものの、ほぼ最善の結果を得ることができた。

## 5. 主な発表論文等

### [雑誌論文](計7件)

Yohei Fujishima, Norisuke Ioku, Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 査読有, 118 巻, 2018, pp. 128—158.

DOI: 10.1016/j.matpur.2018.08.001

Yohei Fujishima, Jens Habermann, Mathias Masson, A fairly strong stability result for parabolic quasiminimizers, *Mathematische Nachrichten*, 査読有, 291 巻, 2018, pp. 1269—1282.

DOI: 10.1002/mana.201700018

Yohei Fujishima, Global existence and blow-up of solutions for the heat equation with exponential nonlinearity, *Journal of Differential Equations*, 査読有, 264 巻, 2018, pp. 6809—6842.

DOI: 10.1016/j.jde.2018.01.048

Yohei Fujishima, Jens Habermann, Stability for parabolic quasi minimizers in metric measure spaces, *Rendiconti Lincei—Matematica e Applicazioni*, 査読有, 29 巻, 2018, pp. 343—376.

DOI: 10.4171/RLM/810

Yohei Fujishima, On the effect of higher order derivatives of initial data on the blow-up set for a semilinear heat equation, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 査読有, 17 巻, 2018, pp. 449—475.

DOI: 10.3934/cpaa.2018025

Yohei Fujishima, Kazuhiro Ishige, Hiroki Maekawa, Blow-up set of type I blowing up solutions for nonlinear parabolic systems, *Mathematische Annalen*, 査読有, 369 巻, 2017, pp. 1491—1525.

DOI: 10.1007/s00208-016-1498-7

Yohei Fujishima, Jens Habermann, Global higher integrability for non-quadratic parabolic quasi-minimizers on metric measure spaces, *Advances in Calculus of Variations*, 査読有, 10 巻, 2017, pp. 267—301.

DOI: 10.1515/acv-2015-0038

### [学会発表](計9件)

藤嶋陽平, 自己相似性を持たない半線形熱方程式の可解性, 日本数学会 2019 年度年会 函数方程式論分科会特別講演, 2019 年 3 月.

藤嶋陽平, 自己相似性を持たない半線形熱方程式の時間大域解について, 応用解析研究会, 2018 年 12 月.

藤嶋陽平, Existence and nonexistence of global in time solutions for a superlinear heat equation, RIMS 共同研究(公開型) 反応拡散方程式—伝播現象と特異性の解析および諸科学への応用—, 2018 年 10 月

藤嶋陽平, Global in time existence of solutions for the heat equation with a superlinear source term, RIMS 共同研究(公開型) 保存則をもつ偏微分方程式の解の正則性, 2018 年 5 月.

藤嶋陽平, Finite propagation of the support of a parabolic quasiminimizer, Conference on 'Metrics and Measures', 2018年1月.

藤嶋陽平, Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term, Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations—China Japan Joint Project for Young Mathematicians 2016, 2016年11月.

藤嶋陽平, Stability for parabolic quasiminimizers, 仙台偏微分方程式研究会, 2016年5月.

藤嶋陽平, Existence and nonexistence of solutions for a heat equation with a superlinear source term, 微分方程式の総合的研究, 2015年12月.

藤嶋陽平, On the effect of higher order derivatives of initial data on the blow-up set for a semilinear heat equation, 信州大学偏微分方程式研究集会, 2015年6月.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：猪奥 倫左

ローマ字氏名：(IOKU, Norisuke)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。