

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：16301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17575

研究課題名(和文) 臨界Hardyの不等式と対数型特異性を伴う偏微分方程式への応用

研究課題名(英文) The critical Hardy inequality and its application to partial differential equations with logarithmic singularity

研究代表者

猪奥 倫左 (ioku, norisuke)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・准教授

研究者番号：50624607

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：臨界Hardyの不等式が持つ不変構造を明らかにした。すなわち、剰余項に現れる対数関数の多重合成が、1段階手前の剰余項が満たす不変性によって自動的に決定されることを示した。また、一般の非線形項を持つ半線形熱方程式について、可解性・一意性について研究し、局所解の分類定理を得た。さらに初期値にスケール不変量の小ささを仮定すると時間大域解が構成できることを証明した。また、指数型の非線形項に対して、特異定常解に着目することで一意性の分類定理を得た。本研究において、対数型特異性と非線形スケール不変性の関連を明示的に明らかにし、それらの構造を種々の問題に適用することで上記の研究結果を得た。

研究成果の概要(英文)：We clarified a scale invariance structure of the critical Hardy inequality. Namely, we proved that the higher order remainder term is automatically determined by the scale invariance property. Moreover, we investigated classification results of existence and nonexistence of the heat equation with general nonlinearity, and proved its threshold integrability of the initial data. In addition, if the nonlinear term is an exponential type, we obtained the classification of uniqueness and non uniqueness results.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：スケール不変性 熱方程式 Hardyの不等式 最良定数

1. 研究開始当初の背景

一般に偏微分方程式の解析には、各種の特異性の制御が欠かせない。とりわけ、ポテンシャル項を持つ偏微分方程式や量子力学において現れる Schrodinger 作用素の解析には、Hardy の不等式(ポテンシャル項の影響を加味したエネルギーに関する不等式)が特異性制御のために本質的である。

実際、Hardy の不等式は量子力学の世界では不確定性原理の補題と呼ばれ、原子が安定に存在するか否かの議論において中心的な役割を担う(Lieb, Rev. Modern Phys.(1976))など、その重要性は多岐に渡る。

これらの重要性のなかでも特筆すべきは、空間三次元以上の場合にはスケール不変性と呼ばれる構造不変性を持つことである。実際、この不変性は上述した不確定性原理の補題の根幹を成し、更には自己相似性や爆発解析といった偏微分方程式への応用上極めて強力な道具を適用可能にする。

一方で、臨界次元における偏微分方程式を解析する際には対数型特異性が現れることが知られており、この特異性は通常のスケール不変構造を壊すために各種の解析を困難にすることが知られており、対数型特異性の背後に隠れる臨界構造は十分に解明されていない。より具体的には、空間2次元の場合には代表的なエネルギー有限関数が対数型特異性を持つ事から、その制御のために対数型の補正項が必要となる。この対数型特異性を伴う臨界 Hardy の不等式は、関数空間論の立場からは自然な埋め込みを導くため、自然な二次元 Hardy の不等式であると見なされてきた。しかしながら、既存の二次元臨界 Hardy の不等式はこの対数型特異性に起因してスケール不変性を持たない。国内外の研究において、関数空間の拡張など多くの一般化がなされてはいるものの、基礎構造であるスケール不変性の破綻は黙認されて来た。そのため、三次元以上で確立された解析手法は空間二次元において破綻し、対数型特異性を伴う偏微分方程式の臨界構造は十分に解明されていない。

2. 研究の目的

本研究では、関数不等式が満たすスケール不変構造に着目することで、不変性の破綻が原因で未開拓であった対数型特異性を伴う偏微分方程式を解析する新たな手法を確立すること、さらに、スケール不変臨界 Hardy の不等式を構築することで、対数型特異性の背後に隠れる臨界構造を解明することを目的として研究をおこなった。具体的には、臨界 Hardy の不等式にある種のスケール不変性を回復させることで、対数型特異性を伴う偏微分方程式に対する新たな解析手法を確立し、さらに対数型特異性を共通背景に持つ分数階微分作用素および Dirac 作用素に対して、スケール不変臨界 Hardy の不等式を構築することにより、対数型特異性の背後に隠れる臨界構造を解明することを目的に研究

をおこなった。

3. 研究の方法

研究は、スケール不変性が満たす数学的構造に着目することで進めた。まず、スケール不変性から最適な重み関数の条件を定め、ついでそこから本質的特異性を除去する変換を行い、剰余項が満たすべき方程式を導出した。さらに、本研究で取り組む関数不等式や付随する変分問題は、伝統的にイタリアにて盛んに研究されている。そこでイタリア(フィレンツェ大学、ミラノ大学)に赴き、Andrea Cianchi 教授、Bernhard Ruf 教授、Elide Terraneo 准教授らと議論を重ね、難点を克服して行った。

4. 研究成果

以下、研究成果について述べる。

初年度には次の成果を得た。臨界 Hardy の不等式の精密化と、半線形熱方程式が持つ可解性について研究を進め、以下の成果を得た。対数型特異性を伴う、境界からの距離関数を重みに持つ臨界 Hardy の不等式について、高階微分が持つ特異性消去効果を明示的に表し、さらに指数を一般化することで Sobolev-Hardy 型の不等式を証明した。一般の非線形項を持つ半線形熱方程式の可解性を、近似的スケール不変性に着目することで非有界な初期値に対して分類した。また、これを用いて、対数型の特異性(指数型の非線形性)を持つ問題に対する明示的な可積分性の閾値を与えた。臨界 Hardy の不等式の重み関数と微分項が満たす直交条件を精密化し、特別な場合において不等式は等式の形で表現出来ることを証明した。

さらに、2年目には次の成果を得た。

臨界 Hardy の不等式が持つ不変構造、および半線形熱方程式が持つ可解性・一意性について研究を進め、以下の成果を得た。昨年度までに得た局所解の分類定理についてさらに研究を深め、初期値にスケール不変量の小ささを仮定すると時間大域解が構成できることを一般の非線形項に対して証明した。また、指数型の非線形項に対して一意性の分類定理を得た。これは特異定常解によって分類される。今後は一意性の結果を一般の非線形項に拡張する。考察する領域が球の場合の臨界 Hardy の不等式について、非線形スケール不変構造が不等式の剰余項を完全に決定することを証明した。すなわち、剰余項に現れる対数関数の多重合成が、1段階手前の剰余項が満たす不変性によって自動的に決定されることを示した。

最終年度には次の研究成果を得た。

逆二乗のポテンシャルを持つ熱方程式について、最良な時間減衰評価を得た。可積分指数が端点の場合には通常のルベグ空間では評価を得ることができないが、Lorentz 空間を導入することでこの難点を回避した。さらに得られた評価を逆二乗ポテンシャルを持つ半線形熱方程式の解析に応用し、対応する藤田指数を得た。研究期間全体を

通した研究結果:臨界 Hardy の不等式を持つ不変構造を明らかにした.すなわち,剰余項に現れる対数関数の多重合成が,1段階手前の剰余項が満たす不変性によって自動的に決定されることを示した.証明には対数型特異性と密接に関連する非線形スケール不変性が本質的な役割をになった.また,一般の非線形項を持つ半線形熱方程式について,可解性・一意性について研究し,局所解の分類定理を得た.さらに初期値にスケール不変量の小ささを仮定すると時間大域解が構成できることを証明した.また,指数型の非線形項に対して,特異定常解に着目することで一意性の分類定理を得た.これらの研究は背後には,対数型特異性が共通して現れる.本研究において,対数型特異性と非線形スケール不変性の関連を明示的に明らかにし,それらの構造を種々の問題に適用することで上記の研究結果を得た.すなわち,考察する不等式(微分方程式)が斉次の場合には,非線形スケール不変性が特異定常解を決定し,その特異性を除去したあとの不等式(微分方程式)はさらに高次の非線形スケール不変性を満たすを明らかにした.これらの研究成果は,以下の論文として発表した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7件)

(査読あり)

1. A. Cianchi, N. Ioku, Canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 56 (2017), 56:31. (査読あり)
2. N. Ioku, M. Ishiwata, T. Ozawa, Hardy type inequalities in SL^p with sharp remainders, *Journal of Inequalities and Applications* (2017) 2017:5. (査読あり)
3. N. Ioku, M. Ishiwata, A Note on the Scale Invariant Structure of Critical Hardy Inequalities, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* 176 (2016), 97--120. (査読あり)
4. N. Ioku, G. Metafunne, C. Spina, M. Sobajima, SL^p - SL^q estimates for homogeneous operators, *Communications in Contemporary Mathematics* 18 (2016) 1550037, 14pp. (査読あり)

5. N. Ioku, M. Ishiwata, T. Ozawa, Sharp remainder of a critical Hardy inequality, *Archiv der Mathematik* 106 (2016), 65--71. (査読あり)
 6. N. Ioku, M. Ishiwata, On a variational problem associated with a Hardy type inequality involving a mean oscillation, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 54 (2015), 3949--3966. (査読あり)
 7. N. Ioku, B. Ruf, E. Terraneo, Existence, Non-existence, and Uniqueness for a Heat Equation with Exponential Nonlinearity in \mathbb{R}^2 , *Mathematical Physics Analysis and Geometry* 18 (2015), 18:29. (査読あり)
- [学会発表](計 12件)
 以下は全て申請者が発表した.
1. ``Canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities'', International Conference Nonlinear Partial Differential Equations 2018, Tokyo University of Science, Tokyo. February 2018.
 2. ``Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term'', Pacific Rim Mathematical Association PRIMA 2017, Oaxaca, Mexico, August 2017.
 3. ``Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term'', International Conference on PDEs, Geometric Analysis and Functional Inequalities, University of Sydney, Australia, March 2017.
 4. ``Existence and Nonexistence of Solutions for the Heat Equation with a Superlinear Source Term'', Korea-Japan International Workshop of Nonlinear Partial Differential Equations--Aspect of Regularity and Asymptotics--, Toyo, Japan, November 2016.
 5. ``Existence and Nonexistence of Solutions for the Heat Equation with a Superlinear Source Term'', Geometry of solutions of PDE's and its related reverse problem, Sendai, Japan, October 2016.
 6. ``Canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities'', Partial Differential Equations and Related Topics, Alghero, Italy, Sep. 2016.
 7. ``Existence and nonexistence of solutions for a heat equation with a superlinear source term'', 11th AIMS conference, Orlando, USA, July 2016.
 8. ``The semilinear heat equation with an exponential nonlinearity'', Geometric and Physical aspects of Trudinger-Moser type

inequalities, Mittag-leffer institute, Sweden, June 2016.

9 . ``Existence and nonexistence of solutions for a heat equation with a superlinear source term'', Geometric aspects of PDE ' s and functional inequalities, Cortona, Italy, April 2016.

10 . ``Existence and nonexistence of solutions for a heat equation with a superlinear source term'', Analysis seminar in Firenze University, Universit a degli Studi di Firenze, Italy, Feb. 2016.

11 . ``Scale-invariant structure of Hardy's inequality on a ball'', RIMS conference ``Shapes and other properties of solutions of PDEs'', Nov. 2015.

12 . ``On the variational problem associated with the Hardy inequalities involving a mean oscillation'', Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's 4th Italian-Japanese Workshop, Palinuro, Italy, May 2015.

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究代表者

猪奥 倫左(IOKU Norisuke)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・准教授

研究者番号：50624607

(2)研究分担者
なし ()

研究者番号：

(3)連携研究者
なし ()

研究者番号：

(4)研究協力者
なし ()