

令和元年6月6日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17577

研究課題名(和文)非同次な楕円型作用素に対する固有値問題

研究課題名(英文) Eigenvalue problems for non-homogeneous elliptic operators

研究代表者

田中 視英子 (Tanaka, Mieko)

東京理科大学・理学部第一部数学科・講師

研究者番号：00459728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：二つの楕円型作用素 p -Laplacian と q -Laplacian を組み合わせて出来る作用素 (p, q) -Laplacian の一般化された固有値問題、特に、二つのパラメータを持つ場合の解析を行った。ここでの固有値問題とは、主に非自明な解が存在または存在しないパラメータについて解析を行うことである。本研究では、正值解の中でも特に重要な解である最小エネルギー解(ground state)を持つパラメータの範囲の解明、及び、そのground stateの解析を行った。また、第二固有値に対応する問題として、符号変化する解が存在するパラメータの範囲が多く存在することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

最近では、本研究で扱った (p, q) -Laplace作用素を含む微分方程式が多く研究されており、最近の (p, q) -Laplace 方程式の研究についてまとめたサーベイ論文(2017年出版)において本研究も大きく取り上げられた。この結果、 (p, q) -Laplacian の他の境界条件に変えた場合の固有値問題への研究が複数始められ現在では幾つかの結果が得られている。また、本研究結果を用いて、関連した方程式への研究成果も得られている。

研究成果の概要(英文)：We analyzed the generalized eigenvalue problem of the operator (p, q) -Laplacian which can be made by combining two elliptic operators p -Laplacian and q -Laplacian, in particular, two parameters. The eigenvalue problem here is mainly to analyze the parameters for which non-trivial solutions exist or not. In this research, we determined the range of parameters in which positive solutions exist completely, and provided the existence of parameters in which there is a sign-changing solution.

研究分野：微分方程式

キーワード：非線形固有値問題 非同次な楕円型作用素

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究では主に非同次な楕円型作用素 (p,q) -Laplacian の固有値の解析を行うことが目的であり動機である。研究開始当初には、 (p,q) -Laplacian の研究が活発に行われ始められ、単独の偏微分方程式で扱われているものでは He-Li (2008), Wu-Yang (2009), Sidiropoulos (2010), Yin-Yang (2011, 2012), Benouhiba-Belyacine (2012, 2013) などがあげられる。しかし、 (p,q) -Laplacian の(重み付き)固有値問題に関連した非線形項を持つ場合の方程式に関する結果は極めて少なく、どのような問題設定が適当であるかも分かっていなかった。本研究の開始当初には研究代表者は非同次な (p,q) -Laplace 作用素に対する固有値問題を元々の p -Laplace 作用素の非線形固有値問題を用いて設定を行った。特に、最初の設定では Benouhiba-Belyacine が扱っていた p -Laplacian の固有値問題に q -Laplacian を足した単純な場合の研究を行っていたが、これは作用素が二つであるのにパラメータが一つという設定であった。その後、同じパラメータを持つ二つの固有値問題からなる問題設定へと研究の範囲を広げていき、現在の二つのパラメータを持つ場合に至った。研究代表者は、研究開始当初に扱っていた特別な場合にもある程度の結果を得ることに成功していたが、元の p -Laplacian の固有値問題においても未解決な部分が多いことにも起因して、多くの部分の解析が困難となり扱えていない部分が多かった。そこで、本研究では未解決な部分を少しでも解決し得られた解の解析を行い、関連した微分方程式への応用の足掛かりとすることが研究開始当初の動機であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、非線形楕円型作用素の固有値問題、特に (p,q) -Laplace 作用素の第一固有値や第二固有値に関連した解析を行うことが目的である。非線形固有値問題は解の存在・非存在と関係しているが、同次性を持つような p -Laplace 作用素の場合でさえも分からない部分が多く残されている。研究代表者は非同次な (p,q) -Laplace 作用素に対する固有値問題を導入・解析を行い始めたが未解決な部分が多く残っていた。本研究では主に研究代表者が導入した (p,q) -Laplacian の一般化された固有値問題において未解決な部分を少しでも解決し、関連した問題や他の楕円型作用素を含む偏微分方程式への応用への足掛かりとすることが研究の目的である。特に、固有値問題として第一固有値を解析することは正值解の存在・非存在について解析することに対応するので、 (p,q) -Laplace 方程式の正值解の存在するパラメータの範囲を確定し、得られた正值解、特に解の中でも重要となる最小エネルギー解 (ground state) や mountain pass 解の解析を行うことが本研究においての主な研究目的である。その後、第二固有値問題に対応する研究対象として符号変化する解が存在または存在しないパラメータの範囲を解明することが二つ目の研究目的である。

3. 研究の方法

研究代表者は当初、 (p,q) -Laplace 作用素に対する固有値問題はパラメータが一つの場合であり、自然な解析方法だと考えていた。しかし、 p -Laplacian と q -Laplacian のそれぞれの固有値問題を組み合わせた問題と考え、パラメータの数を増やすことによって解析の方法に広がりを見せることが出来ると考えた。これは、単独の p -Laplacian の場合には二つのパラメータを持つ Fucik スペクトルという物を研究代表者が過去に研究していた経験から取った自然な方法でもある。実際、二つのパラメータを導入し、解析することで扱わなければならないパラメータの状況が増えるが、解析に役立つ場合や特殊なパラメータの存在などの発見に繋がった。

最初に (p,q) -Laplacian の第一タイプの一般化された固有値 (対応する方程式に正值解が存在するパラメータ) について解析を行ったが、このままでは色々な正值解を持つ場合が含まれていて詳細な解析を行うことが困難であった。そこで、最小エネルギー解、特に ground state についての詳しい解析を行った。この解析結果により、今までにはなかった p と q の状況によって ground state の存在・非存在が変化する特別なパラメータのペアが 1 つだけ存在することが判明した。また、あるパラメータの範囲では、エネルギーが負の最小エネルギー解とエネルギーが正の中での最小エネルギー解の存在を言うことで正值解の多重性を示すことに成功した。

符号変化解の存在には、単独の p -Laplacian の固有値の列を特徴付けるものが幾つか存在するが、本研究では Drabek-Robinson が導入した p -Laplacian の固有値の特徴付けを用いて、符号変化解の存在を示した。ここで、問題となるのはパラメータが単独の p -Laplacian の固有値であるような場合 (resonant) であるときには、変分法では重要な Palais-Smale 条件が成り立たない場合があることが知られている。そのため、このような resonant な時には、何らかの形で仮定が追加される必要がある。本研究では、Drabek-Robinson が導入した仮定から自然な形で追加条件を課すことにより、この問題点を解決した。この形で追加条件の設定は、今後の (p,q) -Laplacian を主要部を持つ resonant な場合を扱う場合に活躍されると考えている。

論文 で扱った、関連した方程式の解の存在には、符号変化解で考案・考察した手法を改良

することで多くの部分を示すことが出来た。特別なパラメータの場合には、一般化されたポアンカレ不等式というものを上手く利用することで解の存在を示すことが出来た。また、解の符号判定に関しても、本研究の先行結果の利用・解のエネルギーの評価・パラメータの変化によるエネルギーの変化の考察などにより結果を得ることに成功した。

4. 研究成果

論文 や では (p, q) -Laplacian やそれを一般化された楕円型作用素を含む偏微分方程式、特に正値解について解の存在について扱った。特に、非線形項に convention term を含む場合を扱っており、この場合には変分構造が普通には入らないので扱いが困難となる場合が多い。また、得られた解の正値性を得る為の方法として、最大値原理などがあるが、論文 では一般の楕円型作用素と非線形項に対して最大値原理を得ることにより、より一般の場合に解の正値性を示すことが出来た。

論文 では、研究代表者が導入した (p, q) -Laplace 作用素の二つのパラメータを持つ一般化された固有値問題の第 1 タイプ (対応する方程式が正値解を持つ) の中で大事な最小エネルギー解と関係する ground state についての解析を行った。この研究の中で、ある特別なパラメータのペアでは (平面内ではこの 1 点のみ) , p と q の関係によって ground state の存在が変わるという予想外の結果が得られた。この特別なパラメータの点の傍でどのような状況が起きているのか解析することは今後の研究課題と考える。この研究成果を受けて他の境界条件における研究が進み、同様な特別なパラメータが存在するのか、という問題提起となることが期待される。この論文では、あるパラメータの範囲では正値解の多重性が起きるという結果も与えることが出来た。

論文 と では、 (p, q) -Laplace 作用素の二つのパラメータを持つ一般化された固有値問題の第 2 タイプに対応する符号変化する解の存在するパラメータの範囲と存在しない範囲について与えることが出来た。しかし、単独の場合の p -Laplacian の第二固有値以上の固有値についてはあまり解析されていないことに起因され、 (p, q) -Laplace 方程式 の符号変化解が存在するパラメータの範囲を完全には決定することは出来なかった。しかし、符号変化解の存在・非存在についても、論文 で発見された特別なパラメータの点でも他よりもデリケートな扱いが必要であることが判明した。また、単独の p -Laplacian の resonant な場合に Drabek-Robinson が導入した仮定から (p, q) -Laplacian に対する resonant な場合に自然な形での追加条件を考察し、導入を行った。この追加条件は、今後の (p, q) -Laplacian を主要部に持つ resonant な場合を扱う場合に活躍されると考えている。

論文 では、論文 から の結果を利用して、二つのパラメータを持つ固有値問題と関係した (p, q) -Laplace 方程式の解の存在とその解の符号について結果を与えた。これは、単独の p -Laplacian の固有値問題のときには、Fredholm の交代定理や Antimaximum principle として知られる結果に関連する。本研究では、論文 で得られた特別なパラメータの点では p -Laplacian の場合の Fredholm の交代定理で知られている条件 (固有関数との直交条件) が自然と表れてくることが分かった。また、解の符号についても、パラメータが第一タイプの固有値 (対応する方程式が正値解を持つ場合のパラメータ) の近傍にある場合に解析が大きく進んだ。しかし、完全には判明することは出来なかったため、さらなる解析が必要であると考えられる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 6 件)

Vladimir Bobkov, Mieko Tanaka, On the Fredholm-type theorems and sign properties of solutions for (p, q) -Laplace equations, Annali di Matematica Pure ed Applicata, 査読有, 2019, 印刷中
DOI: 10.1007/s10231-019-00836-x

Vladimir Bobkov, Mieko Tanaka, On sign-changing solutions for (p, q) -Laplace equations with two parameters, Advances in Nonlinear Analysis, 査読有, 8 巻, 2019, 101-129
DOI: 10.1515/anona-2016-0172

Vladimir Bobkov, Mieko Tanaka, On sign-changing solutions for resonant (p, q) -Laplace equations, Differential Equations & Applications, 査読有, 10 巻, 2018, 197-208
DOI: 10.7153/dea-2018-10-12

Vladimir Bobkov, Mieko Tanaka, Remarks on minimizers for (p, q) -Laplace equations with two parameters, Communications on Pure and Applied Analysis, 査読有, 17 巻, 2018,

1219-1253

DOI: 10.3934/cpaa.2018059

Dumitru Motreanu, Mieko Tanaka, Existence of positive solutions for nonlinear elliptic equations, *Nonlinear Analysis TMA*, 査読有, 152 巻, 2017, 36-85

DOI: 10.1016/j.na.2016.12.011

Luiz Faria, Olimpio Miyagaki, Mieke Tanaka, Existence of a positive solution for problems with (p,q) -Laplacian and convection term in R^N ,

[学会発表](計 5 件)

田中 視英子, Remarks on solutions for (p,q) -Laplace equation with two parameters, さいたま数理解析セミナー, 2018

田中 視英子, Sign properties of solutions for (p,q) -Laplace equations, International workshop on Nonlinear PDEs 2018, 2018

田中 視英子, Solutions for (p,q) -Laplace equations with two parameters, The 12th. AIMS Conference SS101, 2018

田中 視英子, Remarks on minimizers for (p,q) -Laplace equations with two parameters, 神楽坂解析セミナー, 2017

田中 視英子, Existence of a positive solution for nonlinear elliptic equations with convection term, 新発田偏微分方程式研究会, 2016 年

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。