

令和 5 年 5 月 11 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2022

課題番号：15K17578

研究課題名（和文）ケラー・シーゲル・ナビエ・ストークス系の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of Keller-Segel-fluid systems

研究代表者

石田 祥子 (Ishida, Sachiko)

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：60712057

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本課題の目的は生物の走化性（化学物質の濃度勾配に沿って生物が特定の方向に移動する性質）を記述する数理モデルの基礎解析である。退化型拡散項をもつ走化性モデルに対する解の有界性・有限時間爆発の証明に取り組み、これらに分ける臨界条件を部分的に明らかにした。次に、癌の浸潤現象を表す数理モデルに対し、その可解性と時間無限大での解の安定化を示した。これら2つのモデルを含むような発散型放物型方程式に対する有界な解の安定化を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

[学術的意義] 解の有界性と弱位相でのヘルダー連続性を用いて、発散型放物型方程式に対する有界な解の安定化を証明した。いくつかの条件が必要になるが、この手法は走化性モデルに分類される多様な系に適用することができ、統一的に扱えるようになった。

[社会的意義] 走化性とは細胞や生物の基本的な誘導システムのことで、細胞性粘菌の集合体形成、免疫システム、胚発生などの生物学的機能に現れる重要な性質である。その応用は幅広く、社会科学分野にも取り入れられているため、走化性モデルの解析は数学分野だけでなく他分野への貢献が期待できる。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this project is the basic analysis of a mathematical model describing chemotaxis (the property of a slime mold to move in a specific direction along a concentration gradient of a chemical substance). We have proved the boundedness and finite-time blow-up of the solution to a chemotaxis model with a degenerate diffusion term, and partially clarified the condition which separates the two. Next, for a chemotaxis model arising from tumor invasion, we showed its solvability and stabilization as time tends infinity. We also proved stabilization for parabolic equations with divergence form such that these two models are included.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：走化性方程式 癌浸潤モデル 大域可解性 解の有界性 解の安定化

1. 研究開始当初の背景

1970年にE.F. KellerとL.A. Segelにより細胞性粘菌のライフサイクルの一部である集中現象を表す数理モデルが提唱された。このモデルの本質を保ったまま2連立に単純化したモデルはケラー・シーゲル系と呼ばれている。ケラー・シーゲル系は線形拡散や第2方程式が楕円型の場合は精密な解析が進み、解の時間大域存在と有限時間爆発とを分ける閾値についても知られている。一方で退化拡散モデルや第2方程式が放物型の系に対する研究は限定的であり、特に両者を合わせた退化型拡散項をもつ放物・放物型モデルでは、時間大域可解性は得られているものの、解の有界性や漸近挙動などの基礎解析にも課題があった。一方で、Tuvalらが溶液中を泳ぐ大腸菌の酸素走性に着目して走化性方程式と流体力学の基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式を組み合わせた系を提唱し(Tuval et al. (2005))、より発展した系に対する研究が始まった。ここでは退化型拡散項をもつ場合に限定して背景を述べる。2次元の場合、Tao-Winkler(2012)、Ishida(2015)により、大域可解性と解の有界性が報告されている。しかし、3次元の場合には大域可解性すら十分に分かっていない状況であった。

2. 研究の目的

「1. 研究開始当初の背景」に述べたように、3次元ケラー・シーゲル・ナビエ・ストークス系に対する基礎解析は十分でなかったため、解が時間大域的に存在するための条件や解の爆発の可能性を探るのが目的であった。しかし、これらの解決には十分な時間が必要と判断したため、ケラー・シーゲル・ナビエ・ストークス系の解析を進めるために重要となるケラー・シーゲル系の研究を軸として、以下の(1), (2), (3)を目的とする。

(1) ケラー・シーゲル系

退化型拡散項をもつ放物・放物型モデルを対象とする。ここで、 N を領域の次元、 m を拡散の強さ、 q を凝集の強さとする。先行研究Ishida-Seki-Yokota (2014)、Ishida-Yokota (2013)から、条件 $m = q - 2/N$ が解の大域有界性と有限時間爆発とを分ける臨界条件として予想されていたが、上記の結果は時間無限大での爆発の可能性を含んでいたため完全には解決していなかった。そこで解の有限時間爆発を示し、臨界条件を明らかにする。次に、解の漸近挙動について考える。

(2) 癌浸潤モデル

Fujie-Ito-Yokota(2014)により提唱された走化性癌浸潤モデルを対象とする。彼らは線形拡散モデルに対し局所可解性のみを示しているため、初めに大域可解性の証明に取り組む。

(3) 発散型放物型方程式

ケラー・シーゲル・ナビエ・ストークス系の研究へ向けて、発散型放物型方程式の安定化の解析に進む。証明には(1), (2)で培った知識を応用し様々な形の走化性方程式を統一的に扱える手法を編み出す。

3. 研究の方法

研究開始後に新たに発表された研究成果をここで加えつつ、3つの目的それぞれに対し以下のように研究を行う。

(1) ケラー・シーゲル系

全領域の場合、最大正則性原理を用いるシンプルな方法により大域可解性は示されていたが解の有界性は未解決のままであった(Ishida-Yokota(2012))。一方で、有界領域の場合には大域有界性まで示されている(Tao-Winkler(2012)、Seki-Ishida-Yokota (2014))。彼らは未知関数のある種のエネルギーを用いたが、その評価は領域の測度に依存しているため全領域の場合には適用できない。また、パラメーターの調整などに煩雑さがあった。そこで、前者の最大正則性原理を用いる手法により放物・放物型を放物・楕円型と同等に扱えることを利用して、証明のシンプルさを保ったまま解の有界性を示す。次に、有界領域における非退化型拡散項をもつケラー・シーゲル系に対する球対称解の有限時間爆発の証明(Cieslak-Stinner(2012, 2014))を退化型拡散の場合に拡張する。

(2) 癌浸潤モデル

癌細胞のランダム運動(random motility)を考慮して拡散係数関数を2つの未知関数に依存させたモデルを考える。まずは簡単のために拡散係数をべき乗相当とする。3次元以下では第二方程式に対する解の勾配が有界であることを利用して大域可解性ととも、解の有界性・安定化を示す。

(3) 発散型放物型方程式

上記の2つの研究を基盤に有界な解の安定化を示す。

4. 研究成果

「3. 研究方法」に従って研究を行い、以下の研究成果を得た。研究成果はそれぞれ雑誌論文として公表した。

(1) ケラー・シーゲル系

第二方程式に対する最大正則性原理を用いて未知関数の L^p ノルムに関する常微分不等式を導き、これを解くことで得られる L^p 有界性とモーザーの反復法により解の有界性を導いた。この方法は領域に依らずに有効であるため、明解な手法という意味では有界領域における先行研究の改良となっている。次に、リャプノフ関数と呼ばれる方程式のエネルギーを利用して、初期値のエネルギーが負の方向に大きい場合に解が有限時間爆発することを示した。以上の2つの結果により、解の大域有界性と有限時間爆発とを分ける条件が $m = q - 2/N$ となることを確定した。続いて、研究成果(3)の応用として放物・楕円型および放物・放物型モデルに対する解の安定化を示した。

(2) 癌浸潤モデル

拡散係数関数が2つの未知関数に依存しているランダム拡散モデルを対象とした。研究の方法(2)により、特に退化型拡散モデルに対する初めての結果として、 $1 \leq N \leq 3, m \geq 1, q = 2$ の場合に大域可解性と解の有界性を示した。しかし、退化型拡散による解の正則性の損失から安定化の解析は難しく、解が平衡点へ収束することを部分的に解決するにとどまった。その後、研究成果(3)をランダム拡散モデルに適用できる形に拡張することで、弱解が平衡点へ弱い位相で収束することを証明した。また、 $N \geq 4, m \geq 1, q \geq 2$ の場合には Jin-Liu-Shi (2018)により $N \geq 4, m > q - 4/N$ の場合に有界な大域解の存在が報告されている。我々は最大正則性原理とソボレフの埋め込み定理を用いるシンプルな手法により、条件 $N \geq 2, m > q - 4/N$ の下で同様の結果を得た。

(3) 発散型放物型方程式

ケラー・シーゲル系、癌浸潤モデル、ケラー・シーゲル・ナヴィエ・ストークス系などの走化性モデルに対する解の安定化の先行研究から、解が初期値の積分平均から決まる平衡点に時間無限大で収束することが知られている (Cao (2015)、Fujie-Ishida-Ito-Yokota (2018)、Winkler (2015))。しかし、走化性という近い性質を持っているにも関わらず、その証明方法はすべて異なる方法であり方程式に強く依存していた。そこで全く異なるアプローチとして、解の有界性から得られる平衡点への L^p 収束と解の汎弱位相空間でのヘルダー連続性を用いることにより解の安定化を証明した。このアプローチは上記の3つの方程式に応用できるため統一的な手法を確立できたといえる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ishida Sachiko, Yokota Tomomi	4. 巻 0
2. 論文標題 Stabilization in degenerate parabolic equations in divergence form and application to chemotaxis systems	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Archivum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 181 ~ 189
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5817/AM2023-2-181	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ishida Sachiko, Yokota Tomomi	4. 巻 0
2. 論文標題 Application of weak stabilization theory for degenerate parabolic equations in divergence form to a chemotaxis model for tumor invasion	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems - B	6. 最初と最後の頁 0 ~ 0
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdsb.2022256	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ishida Sachiko, Yokota Tomomi	4. 巻 61
2. 論文標題 Weak stabilization in degenerate parabolic equations in divergence form: application to degenerate Keller--Segel systems	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-022-02203-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hashira Takahiro, Ishida Sachiko, Yokota Tomomi	4. 巻 264
2. 論文標題 Finite-time blow-up for quasilinear degenerate Keller--Segel systems of parabolic-parabolic type	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 6459 ~ 6485
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.01.038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sachiko Ishida, Tomomi Yokota	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Boundedness in a quasilinear fully parabolic Keller--Segel system via maximal Sobolev regularity	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Special issue of the Journal "Discrete and Dynamical Systems - S" with title Analysis of cross-diffusion systems	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kentarou Fujie, Sachiko Ishida, Akio Ito, Tomomi Yokota	4. 巻 61
2. 論文標題 Large time behavior in a chemotaxis model with nonlinear general diffusion for tumor invasion	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 37 ~ 80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 石田祥子
2. 発表標題 Large time behavior for weak solutions of parabolic equations with L^1 -conservation law
3. 学会等名 第47回 発展方程式研究会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 石田祥子
2. 発表標題 L^1 -保存則をもつ放物型方程式に対する弱解の安定化
3. 学会等名 日本数学会 2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 石田祥子
2. 発表標題 Weak stabilization of solutions for parabolic equations in divergence form
3. 学会等名 第 713 回応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Sachiko Ishida
2. 発表標題 Large time behavior for weak solutions of parabolic equations in divergence form
3. 学会等名 The Mini International Workshop on Mathematical Analysis of Chemotaxis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sachiko Ishida
2. 発表標題 Boundedness, asymptotic behaviour vs. finite-time blow-up for quasilinear Keller--Segel model
3. 学会等名 Equadiff 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sachiko Ishida
2. 発表標題 Boundedness and weak stabilization in Keller--Segel systems with porous medium diffusion
3. 学会等名 Chemotaxis and Nonlinear Parabolic Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石田祥子
2. 発表標題 準線形退化放物・放物型Keller--Segel系の時間大域可解性と解の安定化
3. 学会等名 第45回発展方程式研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石田祥子
2. 発表標題 Weak stabilization in Keller--Segel systems with degenerate diffusion
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 石田祥子
2. 発表標題 Solvability and boundedness in a 2D chemotaxis-fluid system
3. 学会等名 NLPDEセミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石田祥子
2. 発表標題 2次元有界領域におけるchemotaxis-Navier--Stokes系の有界性について
3. 学会等名 第6回岐阜数理科学研究会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Sachiko Ishida
2. 発表標題 Solvability and blow-up in fully parabolic degenerate Keller--Segel systems
3. 学会等名 Mathematical seminar at University of Hawaii at Manoa (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石田 祥子
2. 発表標題 Finite-time blow-up in a parabolic-parabolic Keller--Segel system with porous medium diffusion
3. 学会等名 第13回 非線型の諸問題 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石田祥子
2. 発表標題 Blow-up solution for a fully parabolic degenerate Keller--Segel system in the super critical case
3. 学会等名 名古屋大学微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Sachiko Ishida
2. 発表標題 Finite-time blow-up in a quasilinear degenerate parabolic-parabolic Keller--Segel system
3. 学会等名 The 3rd International Workshop on Mathematical Analysis of Chemotaxis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石田祥子
2. 発表標題 Finite-time blow-up in a fully parabolic Keller--Segel system with degenerate diffusion
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会, 関数方程式分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Ishida
2. 発表標題 Global Existence and Boundedness in A Quasilinear Chemotaxis-Navier--Stokes System with Position Dependent Sensitivity
3. 学会等名 The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 石田 祥子
2. 発表標題 Chemotaxis-Navier--Stokes系とその周辺の数学解
3. 学会等名 日本数学会2015年度秋季総合分科会 実函数論分科会 (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 石田 祥子
2. 発表標題 Global solvability of a 2D coupled chemotaxis-uid system with position sensitivity
3. 学会等名 第3回大阪駅前セミナー (招待講演)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Sachiko ISHIDA Home page
<https://sites.google.com/view/s-ishida/%E3%83%9B%E3%83%BC%E3%83%A0>
石田祥子 (researchmap)
<https://researchmap.jp/ishidasachiko>

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 The 6th International Workshop on Mathematical Analysis of Chemotaxis	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 The 2nd International Workshop on Mathematical Analysis of Chemotaxis mini	開催年 2022年～2022年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------