様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７５８６

研究課題名（和文）ゲーデルのプログラムと巨大基数公理・強制法公理について

研究課題名（英文）Goedel's program, large cardinal axioms, and forcing axioms

研究代表者
池上　大祐（IKEGAMI, Daisuke）

東京電機大学・工学部・助教

研究者番号：２０７４７２０８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、無限基数κが与えられた時、P(κ）の部分集合に対する普遍ベール性を導入し、以下の成果が得られた：① P(κ）の部分集合に対する普遍ベール性について、a) 強制法の言葉、b) 木の言葉、c) 初等埋め込みの言葉をそれぞれ用いて、３種類の特徴づけを与えた。②κ=ω_1 のとき、巨大基数・内部モデル理論の仮定の下で、V の初等部分構造で濃度ω_1であり、かつω_1を部分集合として含むものを任意に取り、その Mostowski 崩壊を M としたとき、M が反復可能であることを witness する数学的構造として、P(ω_1) の部分集合で普遍ベールなものが取れることを示した。

研究成果の概要（英文）：In this research, we introduce the notion of universally Baireness for subsets of P(kappa) for an infinite kappa, and characterize this notion in terms of forcings, trees, and generic elementary embeddings. When kappa is equal to omega_1, under the assumptions on large cardinals and inner model theory, we show the following: given an elementary substructure X of V of size omega_1, letting M the Mostowski collapse of X, M is iterable and its iterability is witnessed by a subset of P(omega_1) which universally Baire.

研究分野：数理論理学とくに集合論

キーワード：連続体仮説　ゲーデルのプログラム　巨大基数公理　強制法公理　内部モデル理論　記述集合論　ω_1の部分集合　普遍ベール集合

１．研究開始当初の背景

19 世紀後半、三角級数の一意性の証明の議論などを契機に、カントールは、無限を、有限の極限としてではなく一つのオブジェクトとして捉え、数学的対象としての無限として**順序数・基数**の概念、集合のサイズとして**濃度**の概念を定式化した。そして、超限帰納法・超限再帰的定義を初めとする無限の一般論を展開した。

1873 年、カントールは、実数全体の集合の濃度が自然数全体の集合の濃度より真に大きいことを証明した。そして、実数全体の集合の濃度より小さく、自然数全体の集合の濃度より大きい集合の濃度（あるいは基数）が存在しないことを予想した。これを**連続体仮説**という。

1938 年、ゲーデルは、現在我々が扱っている標準的な集合論の公理系（ZFC）からは連続体仮説が反証できないことを証明した。その後、連続体仮説が ZFC から証明も反証もできないことを予期したうえで、ゲーデルは、ZFC を拡張した公理系で“妥当”と考えられるものを仮定し、連続体仮説を初めとする、 ZFC で決定できるかどうかわからない“興味深い”数学的命題たちの真偽を決定する、という研究プログラムを打ち立てた。これを**ゲーデルのプログラム**という。

ゲーデルのプログラムにおける“妥当な”公理系としてゲーデルが考えていたものの一つは、ZFC に**巨大基数公理**を付け加えた公理系である。無限は有限に対して様々な超越性を持つが、そのような超越性を自分より小さな基数たちに対して持つ不可算基数を**巨大基数**と呼ぶ。巨大基数の存在を保証する巨大基数公理は、ZFC だけでは決定できない様々な命題の真偽を決定し、命題の無矛盾性の強さの標準的な指標となるなど、現代集合論において中心的な役割を果たしている。

1963 年、コーエンは、連続体仮説が ZFC から証明できないことを示した。ある命題が集合論の公理系から証明できないことを示すには、その命題の否定が成り立つような**集合論のモデル**を構成すればよい。

コーエンが導入したのは、順序集合を使って、与えられた集合論のモデルを拡大する新しい集合論のモデル（**強制拡大**）を構成する画期的な手法（**強制法**）であった。この手法により、今までに多くの命題の（集合論の公理系からの）証明不可能性や（集合論の公理系との）無矛盾性が得られている。

ゲーデルのプログラム・巨大基数公理・連続体仮説の話に戻ると、1967 年、レヴィとソロヴェイは、強制法を用いて、ZFC と巨大基数公理だけでは連続体仮説の真偽が決定できないことを示した。

しかし、ゲーデルのプログラムはここで終わりを告げず、ここ 30 年で、集合論の多くの命題の真偽が ZFC と巨大基数公理によって決定できることがわかってきた。特にウディンは、巨大基数の存在を仮定したとき、(N, P(N), ¥in) という**二階算術**の構造で表現できる数学の命題の真偽は、強制法によって変えることができないことを証明した。この結果を導く研究の過程で、巨大基数公理・強制法絶対性・内部モデル理論・無限ゲームの決定性といった集合論の様々な研究分野の間に密接な関連があることがわかってきた。このように、ゲーデルのプログラムとその精神は集合論の原動力の一つとなり、今もなお集合論に大きな影響を与えている。

1970 年、マーティンは、ベールの範疇定理の拡張としてマーティンの公理を導入し、当時強制法によって得られた様々な数学的現象を同公理によって説明した。マーティンの公理は、現代集合論で**強制法公理**と呼ばれるもののうち最も基本的なものである。

1984 年、フォアマン、マギダー、シェラーは、**Martin's Maximum** (MM)という強制法公理を定式化し、以下を証明した：a) ZFC と「超コンパクト基数という巨大基数の存在」が無矛盾であれば、ZFC+MM も無矛盾である、b) MM は様々な命題の真偽を決定し、特に連続体仮説の否定を導く。MM の導入は、多くの未解決だった問題を解くばかりでなく、巨大基数・内部モデル理論・無限ゲームの決定性・イデアルの研究を結びつける契機となり、集合論における様々な物の見方を変えるブレークスルーとなった。

２．研究の目的

本研究の目的は、**ゲーデルのプログラム**を推し進めかつ実践することである。ウディンを初めとする集合論の研究者により、巨大基数公理の下で、自然数全体の部分集合や二階算術の構造（N, P(N), ¥in）については既に深い理解が得られている。本研究では、巨大基数公理と強制法公理の下で、最小の不可算基数ω_1 の部分集合や二階の構造（ω_1, P(ω_1), ¥in）についての理解を、巨大基数公理の仮定の下での二階算術の構造（N, P(N), ¥in）についての理解と同程度に深めることを目標とする。

上記目標を達成するため、本研究では以下をテーマとする。

(1)二階算術の構造（N, P(N), ¥in）に対して行われている計算論・再帰理論を一般化した、「ω_1 の部分集合たちに対する計算論」の構成と発展。

(2)MM をさらに強めた強制法公理 MM^{+++}が、(ω_1, P(ω_1), ¥in) という構造で表現できる命題の真偽をどのくらい決定するかについての考察。

３．研究の方法
　上述の「２．研究の目的」で述べた研究のテーマ(1)、(2)についての以下の内容を目標とする。
　①「ω_1 の部分集合たちに対する計算論」として P(ω_1)の部分集合に対する普遍ベール性の理論を展開し、既存の P(N) の部分集合に対する普遍ベール性の理論と同程度まで発展させる。
　②MM^{+++}を満たす二つの集合論のモデル M,N で適切な条件を満たすものの間では、(ω_1, P(ω_1), ¥in) という構造で表現できるどんな命題の真偽も変わらないことを示す。
　上記①、②を以下のようなステップで達成する。

Step 1：「$¥omega_1$の部分集合たちに対する計算論」の基礎となる部分を構築する。

　まず、フェング、マギダー、ウディンによって導入された P(N)の部分集合に対する普遍ベール性の理論を一般化し、P(ω_1)の部分集合に対する普遍ベール性の基礎理論を、巨大基数公理・強制法公理の下で展開する。記述集合論・再帰理論の立場から、この基礎理論についてどのようなことが成り立つか調べる。

Step 2：濃度がω_1 の反復可能な集合論の構造のうち、特別な性質を持つものを構成する

　次に、濃度がω_1 の反復可能な集合論の構造のうち、ω_1 の部分集合を分析する上で都合のよいものを構成する。ここでは、反復可能な集合論の構造の理論（内部モデル理論）と強制法公理の理論を組み合わせ、上記の集合論の構造を構成し、その構造の一般論を展開する。

Step 3：Step 2 で構成した集合論の構造について、計算論的立場から分析する

　濃度がω_1 の反復可能な集合論の構造の反復可能性は、P(ω_1)の部分集合によって witness できることが知られている。ここでは、Step 2 で構成した集合論の構造に対して、その反復可能性を witness する P(ω_1)の部分集合がどのくらい複雑になるか、Step 1 で展開した計算論的立場から分析する。

Step 4：上記の②で述べた目標を達成する。

　ここでは、MM^{+++}を満たす二つの集合論のモデル M,N で適切な条件を満たすものの間で、Step 2, Step 3 で構成・分析された集合論の構造の反復可能性が絶対的になっていることを示す。これが証明できれば上記目標を達成できることは、研究代表者の今までの研究によりわかっている。

４．研究成果
(1)主な研究成果
　本研究では、無限基数κが与えられた時、P(κ) の部分集合に対する普遍ベール性を導入し、以下の成果が得られた：
① P(κ) の部分集合に対する普遍ベール性について、a) 強制法の言葉、b) 木の言葉、c) 強制法絶対性と generic embeddings の言葉をそれぞれ用いて、３つの異なる特徴づけを与えた。
② P(κ)の部分集合に対する普遍ベール性と、超フィルター・木を用いた弱等質ススリン性の関係について調べ、巨大基数の存在下で後者が前者を導くことを示した（逆が成り立つかは現在考察中である）。
③ κ=ω_1 のとき、巨大基数・内部モデル理論の仮定の下で、V の初等部分構造で濃度ω_1 であり、かつω_1 を部分集合として含むものを任意に取り、その Mostowski 崩壊を M としたとき、M が反復可能であることを witness する数学的構造として、P(ω_1)の部分集合で普遍ベールなものが取れることを示した。
　上記の成果により、前述の「３．研究の方法」で述べた Step 1, Step 2 の目標のほとんどと Step 3 の一部が達成できた。

　また、本研究に関連する研究において、以下の成果が得られた：
④カリフォルニア大学アーバイン校の Nam Trang 助教との共同研究において、極大原理（Maximality Principle）のいくつかの変種について考察し、それらの変種と強制法公理の関係について調べた。その結果、ω_1 の部分集合と定常性を保存する強制法のクラスにおける極大原理が Projective Determinacy (PD) という非常に強い無限ゲームの決定性を導くことが分かった。
⑤ヘルシンキ大学の Jouko Väänänen 教授との共同研究において、ブール値二階論理について、以下が得られた：
a) 巨大基数の存在下で、ブール値二階論理についてのコンパクト性にまつわる基数はω_1 になることがわかった。
b) 巨大基数の存在下で、ブール値二階論理を用いてゲーデルのＬの構成を行って得られるモデル L^2b は、上記の PD を満たす強いモデルである一方で、L のような微細構造を持つ分析可能なモデルであることがわかった。
⑥カリフォルニア大学アーバイン校の Nam Trang 助教との共同研究において、ZF の下で、ω_1 が超コンパクト基数という巨大基数の性質を持てば、従属選択公理が成り立ち、Chang^+ モデルと呼ばれる非常に大きな集合論のモデルに属する実数の集合はすべてルベーグ可測性を初めとする良い性質（正則性）を持つことがわかった。この研究成果は、強い巨大基数公理の下で、上記の Chang^+ モデルにおいて、ω_1 が超コンパクトにな

り AD（決定性公理）を満たす、という事実を背景に、ω_1 が持つ巨大基数の性質が実数の集合たちにどういう影響を与えるか調べて得られた成果である。

(2)今後の課題
i) P(κ)の部分集合に対する計算論の整備が未だに不十分である。上記②で述べた普遍ベール性と弱等質ススリン性の関係、さらには、P(κ)の部分集合に対する Wadge 還元性や決定性との関わりについて詳しく調べる。

ii) 本研究の進展のためには、強い強制法公理 MM^+++ についてのより深い理解が必要である。MM^+++ とその公理の源であるカテゴリー強制法について研究し、本研究を進める。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）
①Daisuke Ikegami, Nam Trang, On a class of maximality principles, Archive for Mathematical Logic, 査読有、2018 年に掲載予定
DOI: 10.1007/s00153-017-0603-2
②Daisuke Ikegami, Notes on Bl-AD_{ω_1}, 京都大学数理解析研究所講究録、査読なし、2042 巻、2017, 72-74.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2042-05.pdf
③ Daisuke Ikegami, Jouko Väänänen, Boolean valued second order logic, Notre Dame Journal of Formal Logic, 査読有、Volume 56, Number 1, 2015, 167-190.
DOI: 10.1215/00294527-2835065

〔学会発表〕（計１６件）
①Daisuke Ikegami, On preserving AD via forcings, Logic in Southern California - Gathering the tribe -, 2018.
②Daisuke Ikegami, On supercompactness of ω_1, The 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, Special session in Set Theory, 2017.
③Daisuke Ikegami, On supercompactness of ω_1, RIMS workshop on Iterated Forcing Theory and Cardinal Invariants, 2017.
④Daisuke Ikegami, On supercompactness of ω_1, Greater Tokyo Bayshore Spring Set Theory Meeting, 2017.
⑤池上　大祐, On supercompactness of ω_1, 日本数学会年会、2017.
⑥池上　大祐、選択公理と数学、第４回 山陰 基礎論・解析学 研究集会、2017.
⑦ Daisuke Ikegami, Boolean valued second order logic, RIMS Workshop on Infinite Combinatorics and Forcing Theory, 2016.
⑧池上　大祐、２階論理とブール値論理、科学基礎論学会 2016 年度研究例会、2016.
⑨ Daisuke Ikegami, Boolean valued second order logic, Greater Tokyo Bayshore Autumn Set Theory Meeting, 2016.
⑩ Daisuke Ikegami, Inner models from Boolean valued higher-order logics and Ω-logic, Workshop on Set-theoretical aspects of the model theory of strong logics, 2016.
⑪ Daisuke Ikegami, Inner models from Boolean valued higher-order logics and Ω-logic, Computability Theory and Foundations of Mathematics, 2016.
⑫池上　大祐, Boolean valued second order logic, 日本数学会年会、2016.
⑬Daisuke Ikegami, Boolean valued second order logic, IMS-JSPS Joint Workshop on Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics, 2016.
⑭ Daisuke Ikegami, Universally Baire subsets of 2^κ, P.O.I Workshop in pure and descriptive set theory, 2015.
⑮ Daisuke Ikegami, On a class of maximality principles, Jarestagung der Deutscher-Mathematiker Vereinigung 2015, minisimposium in set theory, 2015.
⑯ Daisuke Ikegami, Universally Baire subsets of 2^κ, The 5th European Set Theory Conference, 2015.

〔その他〕
ホームページ等
①Daisuke Ikegami
http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~ikegami/
②Researchmap
https://researchmap.jp/ikegami/

６．研究組織
(1)研究代表者
池上　大祐　（IKEGAMI, Daisuke）
東京電機大学・工学部・助教
研究者番号：20747208

(2)研究協力者
Matteo Viale
トリノ大学・数学科・准教授