

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：32644

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17592

研究課題名(和文) 多変数超幾何微分方程式系のグレブナー基底

研究課題名(英文) Groebner Bases for Systems of Multivariable Hypergeometric Differential Equations

研究代表者

中山 洋将 (Nakayama, Hiromasa)

東海大学・理学部・講師

研究者番号：00595952

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,400,000円

研究成果の概要(和文)：D-加群の各種計算アルゴリズムを実行するには、微分作用素環のイデアルのグレブナー基底を求める必要がある。グレブナー基底を計算するアルゴリズムは存在し、計算機を用いて計算できるが、変数を多く含むような複雑な微分方程式系や、一般の n 変数を含む微分方程式系の場合には、計算機を用いてグレブナー基底を計算することは実質不可能である。

本研究では、多変数超幾何微分方程式系に対して、計算機を用いずにグレブナー基底を理論的に計算し、そのグレブナー基底を用いることによって、特性多様体、特異点集合、Pfaff系(連立1階線形偏微分方程式系)、特異点集合上への微分方程式系の制限などを調べる。

研究成果の概要(英文)：To execute algorithms in D-modules, we need to obtain Groebner bases for ideals in the ring of differential operators. We have algorithms to compute Groebner bases, but for systems of differential equations including many variables or n variables, we cannot execute the algorithms.

In this research, we theoretically compute Groebner bases for systems of multivariable hypergeometric differential equations without computer. By using these Groebner bases we derive characteristic varieties, singular locus and Pfaffian systems for systems of multivariable hypergeometric differential equations.

研究分野：計算機代数

キーワード：グレブナー基底 超幾何関数 超幾何微分方程式

1. 研究開始当初の背景

線形偏微分方程式系を代数的に取り扱う理論として、D-加群の理論がある。その理論をもとに、微分作用素環のグレブナー基底を用いて計算機上で実行できるようなものが、D-加群の計算アルゴリズムである。微分方程式系に対し、これらアルゴリズムを実行しようと思うと、まず微分方程式系に対応する、微分作用素環のイデアルのグレブナー基底を求める必要がある。グレブナー基底を計算するアルゴリズム (Buchberger アルゴリズムと呼ばれる) は存在し、計算機を用いて計算できるが、変数を多く含むような複雑な微分方程式系や、一般の n 変数を含む微分方程式系の場合には、計算機を用いてグレブナー基底を計算することは実質不可能になる。例えば、Lauricella 多変数超幾何関数 F_A, F_B, F_C のそれぞれの満たす微分方程式系に対応するイデアルに関して、研究代表者はグレブナー基底を理論的に計算した。例えば、Lauricella 超幾何級数 F_B とは、

$$F_B(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, c; x_1, \dots, x_m) = \sum_{n_1, \dots, n_m} \frac{(a_1)_{n_1} \cdots (a_m)_{n_m} (b_1)_{n_1} \cdots (b_m)_{n_m}}{(c)_{n_1 + \dots + n_m} (1)_{n_1} \cdots (1)_{n_m}} x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$$

であり、Lauricella 超幾何級数 F_B は次の微分方程式系を満たす。

$$\{\theta_i(\theta_1 + \dots + \theta_m + c - 1) - x_i(\theta_i + a_i)(\theta_i + b_i)\} \cdot F_B = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

この微分方程式系に対応する、微分作用素たちの生成する左イデアル I_B を考える。うまく項順序を設定してやると、この左イデアル I_B のグレブナー基底を得ることができる。このグレブナー基底を使うと、微分方程式系の特性多様体 (微分方程式系の一番高階の部分を取り出して得られる) や、特異点集合 (解空間の次元が他より落ちる可能性のある部分) を計算できる。こうして得られた結果は、パラメータに依存しないもので、今まで得られていなかった結果である。例えば、Lauricella F_B の満たす微分方程式系の特異点集合は、

$$x_1 \cdots x_m \prod_{1 \leq i_1 \leq m} (1 - x_{i_1}) \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} (x_{i_1} x_{i_2} - x_{i_1} - x_{i_2}) \cdots (x_1 x_2 \cdots x_m - x_2 \cdots x_m - \cdots - x_1 \cdots x_{m-1})$$

の零点集合となる。 F_B 以外の F_A, F_C についても同様の計算を行うことができ、グレブナー基底、特性多様体、特異点集合を計算することができる。(H. Nakayama, Groebner basis and singular locus of Lauricella's hypergeometric equations", 2014)

2. 研究の目的

D-加群の各種計算アルゴリズムを実行するには、微分作用素環のイデアルのグレブナー

基底を求める必要がある。グレブナー基底を計算するアルゴリズム (Buchberger アルゴリズムと呼ばれる) は存在し、計算機を用いて計算できるが、変数を多く含むような複雑な微分方程式系や、一般の n 変数を含む微分方程式系の場合には、計算機を用いてグレブナー基底を計算することは実質不可能である。本研究では、ある特定の微分方程式系に対して、計算機を用いずにグレブナー基底を理論的に計算し、そのグレブナー基底を用いることによって、特性多様体、特異点集合、Pfaff 系 (連立 1 階線形偏微分方程式系)、特異点集合上への微分方程式系の制限などを調べる。

3. 研究の方法

Lauricella 多変数超幾何微分方程式系に対応する、各微分作用素環のイデアルに対して、次の表のようにグレブナー基底、特異点集合、Pfaff 系などがわかっている

微分方程式系	得られたグレブナー基底とその環	特異点集合	Pfaff 系
F_A	形式べき級数係数微分作用素環 \hat{D}	○	×
F_B	多項式係数微分作用素環 D	○	×
F_C	形式べき級数係数微分作用素環 \hat{D}	○	×
F_D	有理関数係数微分作用素環 R	×	○

(1) Lauricella 超幾何関数に関して、上記の表で計算ができていないものについて、計算を行う。

(2) Lauricella 超幾何関数の満たす微分方程式系に対してグレブナー基底を計算したが、それと同様の手法を用いて、その他の多変数超幾何関数の満たす微分方程式系のグレブナー基底を求める。現時点では、Kampé de Fériet の 2 変数超幾何関数 (Appell の 2 変数超幾何関数のパラメータの数を増やして一般化したもの) の満たす微分方程式系についてグレブナー基底を理論的に求めることができている。計算を行いたい対象としては、Horn の 2 変数超幾何関数や Saran-Lauricella の 3 変数超幾何関数や一般化 Horn 超幾何関数 (n 変数) やそれらの合流型などがある。また、得られたグレブナー基底を用いて、特性多様体、特異点集合、Pfaff 系の計算を行う。

(3) 研究代表者は (H. Nakayama, Groebner basis and singular locus of Lauricella's hypergeometric equations", 2014) において、多項式環の場合にグレブナー基底計算を効率的に行うための手法である Buchberger の useless S-pair criterion について、これの微分作用素環版に対応するものを見つけた。このように多項式環の場合に知られている手法の微分作用素環版に対応するものを見つけ、計算機における微分作用素環のグレブナー基底計算の高速化を行う。

4. 研究成果

(1) 研究目的の 1 つとして、多変数超幾何

微分方程式系のグレブナー基底を理論的に求めることがあったが, Lauricella 超幾何微分方程式系 F_B, F_A, F_C のように容易に求められる例は, 計算実験や様々な計算により, あまりないことがわかった. そのため逆に考え, グレブナー基底を容易に求められるような超幾何微分方程式系や一般の微分方程式系にはどのような特徴があるかを調べることに方針を変更した. その例として Appell 2 変数超幾何微分方程式系 F_1, F_2, F_3, F_4 の一般化の一種である $(k, l)_D, (k, l)_A, (k, l)_B, (k, l)_C$ という微分方程式系 (高山 1984) について計算を行った. これについて, Lauricella 超幾何微分方程式系のグレブナー基底を求めた手法を使って, $(k, l)_A, (k, l)_C$ についての形式べき級数係数微分作用素環におけるイデアルのグレブナー基底を求めることができた. $(k, l)_B$ についての多項式係数微分作用素環におけるイデアルのグレブナー基底について, 計算実験により予想が得られ, そのグレブナー基底を使えば特性多様体や特異点集合がわかる. 例えば, $(1, 1)_B$ で微分作用素の階数が d の微分方程式系は, 次のようなもので適切な項順序についてグレブナー基底になることがわかっている.

$$P \cdot f = 0, Q \cdot f = 0$$

$$P = x(\theta_x + \beta_{0,1})(\theta_x + \beta_{0,2})(\theta_x + \beta_{0,3}) \cdots (\theta_x + \beta_{0,d}) \\ - (\theta_x + \theta_y + \alpha)(\theta_x + \beta_{1,2})(\theta_x + \beta_{1,3}) \cdots (\theta_x + \beta_{1,d})$$

$$Q = y(\theta_y + \beta'_{0,1})(\theta_y + \beta'_{0,2})(\theta_y + \beta'_{0,3}) \cdots (\theta_y + \beta'_{0,d}) \\ - (\theta_x + \theta_y + \alpha)(\theta_y + \beta'_{1,2})(\theta_y + \beta'_{1,3}) \cdots (\theta_y + \beta'_{1,d})$$

(2) Horn 2 変数超幾何関数やその合流型を満たす微分方程式系について, 理論的にグレブナー基底がわかる場合をいくつか見つけた.

(3) Lauricella 超幾何微分方程式系のグレブナー基底がわかっていない例のいくつかについて, グレブナー基底を理論的に得ることができた.

(4) 研究目的に付随して, 微分作用素環 D 上の自由加群 D^r/N 上の各種計算アルゴリズム (generic b 関数, 制限加群, 積分加群, 特性多様体などの計算) が知られているが, それらを数式処理システム Risa/Asir に実装した. これらはプログラムを公開する予定である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

中山洋将, Kampé de Fériet の 2 変数超幾何微分方程式系のグレブナー基底, 数式処理 2015 VOL.21 NO.2, p.49 -- p.51, 数式処理学会, (査読なし)

<http://www.jssac.org/Editor/Suushiki/V21/V212.html>

[学会発表](計 5 件)

中山洋将, ある微分方程式系のグレブナー基底について, RIMS 共同研究 (公開型) Computer Algebra --- Theory and its Applications, 京都大学数理解析研究所, 2017.12.20.

中山洋将, ある 2 変数微分方程式系のグレブナー基底, 日本数式処理学会第 26 回大会, 東邦大学, 2017.6.9.

中山洋将, ある 2 変数超幾何微分方程式系のグレブナー基底について, Risa/Asir Conference 2017, 金沢大学, 2017.3.29.

中山洋将, 多変数超幾何微分方程式系のグレブナー基底について, グレブナー基底の展望 RIMS 隔週セミナー, 京都大学数理解析研究所, 2016.5.11.

中山洋将, 高山信毅, Asir での D^r/N の計算アルゴリズムの実装と計算例, Risa Asir Conference 2016, 金沢大学, 2016.3.29.

[図書](計 1 件)

竹村彰通, 日比孝之, 原尚幸, 東谷章弘, 清智也, 「グレブナー道場」著者一同, 「グレブナー教室 計算代数統計への招待」, 共立出版, 2015 年 7 月
[産業財産権]

出願状況 (計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況 (計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中山洋将 (Nakayama Hiromasa)

東海大学 理学部数学科 講師

研究者番号：00595952

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()