

令和元年6月13日現在

機関番号：32682

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17594

研究課題名(和文)興奮系反応拡散方程式におけるパルス波の渋滞現象

研究課題名(英文) Congestion phenomena of pulses in reaction-diffusion systems with excitability

研究代表者

池田 幸太 (Ikeda, Kota)

明治大学・総合数理学部・専任准教授

研究者番号：50553369

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では樟脳船の集団運動に関する数理モデルについては2つの研究成果を得ることができた。まず、車の渋滞現象を再現するOVモデルとの比較を通じて、樟脳船と車の渋滞現象における類似点と相違点を指摘した。この研究成果をまとめた論文は、既に出版済みである。次に、新たに中心多様体理論を開発することで、偏微分方程式系である数理モデルを常微分方程式系に縮約できることを示した。現在この結果をまとめた論文を投稿中である。また、3変数の興奮系反応拡散方程式系に着目し、パルス波の渋滞現象が起こることを示し、定常解の分岐による進行波解の発生が重要な役割を果たすことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自己駆動する粒子は生物、非生物系に関わらず広く存在し、直接的、あるいは間接的に影響を及ぼすことで自己組織的に構造を形成する。渋滞現象は粒子系が呈する集団運動の一種と考えられており、そのメカニズムの理解は重要である。近年、車の渋滞を数理科学的に説明する試みが近年数多くなされており、特にOVモデルが良く調べられている。一方、反応拡散方程式系に現れる渋滞現象について、その数理的なメカニズムはほとんど未解明である。本研究で解明した反応拡散方程式系における渋滞現象の数理メカニズムや、開発した解析手法により、渋滞現象の理解がさらに深まったであろう。

研究成果の概要(英文)：We obtained two kinds of results in a mathematical model for the collective motion of camphor boats. First, we demonstrated that the numerical results obtained in our models for camphor boats are quite similar to those in a car-following model, the OV model, but there are some different features between our reduced model and a typical OV model. Those results are summarized in a manuscript published in a scientific journal. Secondly, we developed a center manifold theory to reduce the mathematical model of a PDF form for camphor boats into an ordinary differential system.

We also studied a reaction-diffusion system with three components to generate congestion phenomena of pulses. Since the reaction-diffusion system is one of excitable systems, it naturally has a solution with a pulse shape. We conclude that a bifurcation of a standing pulse can generate a traveling pulse and congestion of pulses.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：応用数学一般 中心多様体縮約理論

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

自己駆動する粒子は生物、非生物系に関わらず広く存在し、粒子同士が直接相互作用する場合だけでなく、「場」を介して間接的に相互作用する場合がある。よって、多数の粒子が形成する構造を理解するには、各粒子が駆動する原因だけでなく、系全体としての振る舞いを調べることが重要である。粒子の集団運動にはしばしば渋滞現象が現れる。通常低密度では粒子の速度が大きく高密度では小さいが、渋滞現象ではこれら2状態が同時に出現し、粒子密度に関する疎密波が発生する。高速道路で日常的に車の渋滞が発生することは一般に知られているが、非生物系の粒子である樟脳船の集団運動でも渋滞現象が観測された。よって人的要因だけでなく、数理的なメカニズムも渋滞発生に寄与すると考えられ、数理科学的に説明する試みが近年数多くなされている。

ところで、研究協力者の長山氏によって、3変数反応拡散方程式系(以下(3RD)と表記)においてパルス波が渋滞現象に近い状態を持つことが最近観測された。パルス波の相互作用はBZ反応でも観測されており、協力者である末松氏によって実験的にパルス波の集団運動における振動状態が確認された。このパルス波は消滅・生成を引き起こす可能性があるため、車や樟脳船の運動よりも複雑なダイナミクスを内包している。このような系における渋滞現象は発見されたばかりで、その発生機構や諸性質は未知である。

車の渋滞現象の中でも自然渋滞はOVモデルによって説明される。OVモデルでは車を粒子とみなし、運動方程式を用いて記述される。樟脳船の運動では樟脳船を粒子とみなし、粒子に関する運動方程式と水面での樟脳分子濃度に関する反応拡散方程式を用いてモデル化されている。これらのモデル方程式では粒子の存在が明確である一方、BZ反応や燃焼のモデル方程式を含む興奮系反応拡散方程式では、自己組織的に生まれる進行パルス波が形成される。パルス波は単一の個体、もしくは粒子とみなすことが可能である一方で、方程式には明確に粒子の存在は記述されていない。

### 2. 研究の目的

本研究では、興奮系反応拡散方程式における渋滞現象の解明を行うことを目的とした。特に以下の研究課題に取り組むこととした。

#### 課題1: 中間距離相互作用を考慮したパルス波の集団運動に対する中心多様体論の構築

反応拡散方程式系におけるパルス波の相互作用と中心多様体論の適用に関する先行研究は既に存在している。まず栄氏はパルス波の長距離相互作用を考慮した中心多様体論の構築、及び縮約方程式の導出を行った。しかしながら、この縮約方程式では渋滞現象などの複雑な運動は現れないことが簡単に確認できる。これは、方程式における熊手型の分岐構造、空間対称性、パルス波同士の長距離相互作用を仮定したこと起因する。よって、長距離相互作用のみを考慮してもパルス波の渋滞現象を再現することは難しいだろう。そこで本研究では、パルス波の進行速度が大きく変化する程度の相互作用が起こる距離を考慮し、新しい中心多様体論の構築と縮約方程式の導出を行う。

#### 課題2: 3変数反応拡散方程式系におけるパルス波の諸性質の解明

まず(3RD)における進行パルス列の構成を行い、(3RD)における分散関係式を得る。この件は、中心多様体論を適用する場合に必要な近似中心多様体の構成において重要である。先行研究で指摘されているように、パルス波に関する線形化作用素を考え、零固有値に対応する固有関数によって近似中心多様体を構成することが可能である。先行研究の結果を参考にし、近似中心多様体を構成するために必要な固有関数の構成、諸性質の解明を行う。

#### 課題3: 反応拡散方程式系における渋滞現象発生メカニズムの解明

課題1で得られた結果を具体的な方程式系に適用し、反応拡散方程式系における渋滞現象が起こるために必要な条件を求める。本研究では、FitzHugh-Nagumo方程式、Oregonator方程式、前述の栄氏らが用いた方程式、(3RD)に中心多様体論を適用する。これらの方程式には拡散項の有無やスケールの差異、分岐構造の有無といった数理構造における違いがあるため、これらの条件が渋滞現象に与える影響が調べられる。最終的には末松氏らが指摘したBZ反応における振動状態や長山氏が(3RD)で観測した現象が真に渋滞現象と言えるかどうか、数理の立場から検討する。

### 3. 研究の方法

本研究ではパルス密度に関する1-パラメータ族が存在する事実を用いる。パルス列はパラメータに連続的に依存するので、このパラメータで微分することで導関数が得られる。この導関数が先行研究における一般化固有関数と同じ役割を果たすことが示唆されたため、この関数を利用した中心多様体縮約理論の構築を行う。注意したいのは、先行研究とは異なり、この導関数は加速度を直接表現する関数にはならず、縮約方程式はいわゆる運動方程式とは異なる形式を取ることである。

次に、中心多様体論を適用する場合に最も重要な近似中心多様体の構成を行う。パルス波に関する線形化作用素の零固有値に対応する固有関数によって近似中心多様体を構成することが

可能である。進行パルス列を厳密に構成した後、近似中心多様体を構成するために必要な固有関数の構成、諸性質の解明を行う。このとき、中心多様体に直交する方向に関する解の評価を行うが、評価の際に重要な役割を果たす線形化作用素のレゾルベント評価も併せて行う。

状況によっては、先行研究で実施されているような形式的な議論によって適当な縮約方程式を導出することを検討する。縮約方程式は常微分方程式の形式を取るため、解析は比較的易しい。一様流の線形安定性解析や数値シミュレーションによる渋滞現象の再現、AUTO の援用によって、渋滞現象を再現するために必要なメカニズムの選定を行う。これによって、中心多様体論における縮約の道筋を明確化する。

#### 4. 研究成果

まず、(3RD) に対して特異摂動法を適用することで、各パルス波を特徴付ける 2 つ遷移層の運動を記述する方程式と、相互作用を引き起こす外部場を記述する拡散方程式の連立偏微分方程式を導出した。研究目標を達成するためには、この方程式系の解析を行えば良い。ただし、ここで得られた連立偏微分方程式は階段関数のような不連続性を含むため、解析的に困難な点が新たに発生してしまう。具体的には、ある種の線形化作用素の解析を行うことが研究の核となるのだが、本研究に現れる線形化作用素には、不連続性の影響で自然にデルタ関数が現れる。このような強い特異性を有する場合、既存の中心多様体理論を適用することはできない。そこで、中心多様体理論の構築の第 1 歩として、不連続性を含んだ方程式系における中心多様体理論の構築を目標とし、一定の成果が得られた。特に、デルタ関数の存在によって既存の理論で用いられた手法がいくつも破綻することとなり、本研究では新たな手法の開発を行った。特に、線形化作用素の 0 固有関数空間に相当し、かつ中心多様体をバナッハ多様体と見なした際に定義される束に作用する、ある同型写像を定義する必要があった。この同型写像によって、各切断が一樣な性質を持つ束を導入することが可能となる。また、この同型写像を利用することで、線形作用素のレゾルベント評価にも成功し、この線形化作用素が解析的半群を生成することを確認した。本研究で用いられた同型写像の構成方法は先行研究と本質的に異なるものであり、新しい結果が得られたと言える。特に、正則性の低いデルタ関数を含んでいる場合にも適用できる手法を開発できたので、応用範囲は非常に広い。ここで得られた結果を論文としてまとめ、現在投稿中である。

ここまでで整備した中心多様体理論の有用性を示すため、具体的なモデル方程式に適用し、縮約方程式の解析を行った。本研究では樟脳船の集団運動に着目し、解析やシミュレーションにより渋滞現象を再現できることを示した。さらに、樟脳船に対する縮約方程式と、自動車に対するモデル方程式として知られる 0V モデルにおける解の振る舞いを比較することで、定性的に等しい部分と異なる部分が存在することを確認した。まず、粒子数密度の増加により一様流が不安定化することで渋滞相が出現することが分かった。また、粒子数密度に対する流量を計算することで、いわゆる基本図を得た。これらの結果は、樟脳船と自動車の渋滞現象の類似性を示唆している。一方、分岐解追跡ソフトウェアである AUTO と用いることで両者の相違点が明確になった。0V モデルに現れる渋滞相では、速度が相対的に低い部分は必ず 1 力所にまとまること示唆される。一方、縮約方程式ではそのような箇所は複数現れることが分かった。以上のように、本研究で得られた結果は有益であり、具体的な方程式系に適用可能であることが分かった。ここで得られた結果をまとめた論文は、既に出版済みである。以上の結果を論文にまとめ、現在投稿中である。

興奮系の反応拡散方程式系におけるパルス波の集団運動に現れる振動現象を解析することを目的として、研究課題 2 に取り組んだ。(3RD) を周期境界条件下で考え、区間長と進行波解を持つ速度の関係、いわゆる分散関係式を得た。また、区間長と定常解の安定性の関係を調べた。この結果から、進行波解と定常解の基本的な性質が明らかになった。

次に、この系に適用できる縮約理論の構築に取り組んだ。まず、パルス波が 1 つだけ存在する場合で解が十分進行波解に近い状態を想定し、中心多様体縮約を形式的に適用したところ、シミュレーションでの観察結果を再現できる縮約方程式は得られなかった。次に、フーリエ級数展開を利用した縮約方程式の導出を試みたが、現在までに振動現象を再現できる方程式の導出には至っていない。以上により、先行研究で知られている手法では遷移層の振動現象を解析するには不十分であることが分かった。

各研究課題に対する研究成果をまとめる。研究課題 1 に対して、デルタ関数を含む系に対する中心多様体縮約理論を新たに構築することに成功した。研究課題 2 については、研究を開始した当初想定した内容に対して十分な成果を得ることができた。一方、(3RD) における渋滞現象を再現する縮約方程式の導出、及び縮約方程式を得る手法の開発については現在のところ発展途上であり、今後の研究推進がより一層求められる。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 6 件)

Kota Ikeda, Shin-Ichiro Ei, Masaharu Nagayama, Akiyasu Tomoeda, Reduced model of a reaction-diffusion system for the collective motion of camphor boats, *Physical Review E*, 査読あり, 99, 2019, 062208

Akiyasu Tomoeda, Tomoyuki Miyaji, Kota Ikeda, Bifurcation structure of a car-following model with nonlinear dependence on the relative velocity, *Transportmetrica A: Transport Science*, 査読あり, 14, 2018, 503–519  
Hirohisa Tamagawa, Kota Ikeda, Another interpretation of the Goldman-Hodgkin-Katz equation based on Ling's adsorption theory, *European Biophysics Journal*, 査読あり, 47, 2018, 869–879  
Hirohisa Tamagawa, Kota Ikeda, Generation of membrane potential beyond the conceptual range of Donnan theory and Goldman-Hodgkin-Katz equation, *Journal of Biological Physics*, 査読あり, 43, 2017, 319–340  
Kota Ikeda, Takeshi Miki, Regime shift in a phytoplankton-phosphorus model with vertical structure and seasonality, *Tamkang Journal of Mathematics*, 査読あり, 47, 2016, 109–125  
Hirohisa Tamagawa, Makoto Funatani, Kota Ikeda, Ling's adsorption theory as a mechanism of membrane potential generation observed in both living and nonliving systems, *Membranes*, 査読あり, 6, 2016, 11

[学会発表](計 24 件)

池田 幸太, 単一自己駆動粒子が呈する準周期的な運動の数理解析, 日本応用数理学会 2018 年度年会, 2018 年  
Kota Ikeda, Reduction approach to a reaction-diffusion system for collective motions of camphor boats, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2018  
Kota Ikeda, Quasi-Periodic Solution in a Dynamical System for the Motion of a Single Particle, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2018  
Kota Ikeda, Reduction approach to a reaction-diffusion system for collective motions of camphor boats, MINIWORKSHOP ON NONLINEAR ANALYSIS, 2017  
Kota Ikeda, Reduction approach to a reaction-diffusion system for collective motions of camphor boats, *Mathematics of Pattern Formation*, 2016  
Kota Ikeda, Reduction Approach to a Reaction-diffusion System for Collective Motions of Camphor Boats, 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2016  
池田 幸太, 興奮系反応拡散方程式におけるパルスの渋滞現象, 日本数学会 2016 年度年会, 2016

## 6 . 研究組織

### (2)研究協力者

研究協力者氏名 : 末松 J. 信彦  
ローマ字氏名 : Nobuhiko J. Suematsu

研究協力者氏名 : 長山 雅晴  
ローマ字氏名 : Masaharu Nagayama

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。