

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17596

研究課題名(和文)非線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算理論の研究

研究課題名(英文)Studies on verified numerical computations for nonlinear parabolic partial differential equations

研究代表者

高安 亮紀(Takayasu, Akitoshi)

筑波大学・システム情報系・助教

研究者番号：60707743

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文):世の中の自然現象を数学問題にモデル化すると偏微分方程式と呼ばれる未知関数の微分に関する関係式が頻出する。これを数学的・数値的に解いて未知関数を特定することが自然科学の分野での研究対象となる。本研究では、固体燃料の燃焼理論や生物増殖の数理モデルなどで現れる非線形放物型方程式と呼ばれる偏微分方程式のクラスに対して、その初期値境界値問題の解が数値計算で得られた近似解の近傍に存在する、あるいは存在しない事を、数値計算によって証明する計算機援用手法を開発した。これは精度保証付き数値計算と呼ばれ、微分方程式の数学解析に対する現代的なアプローチとして注目を集めている。

研究成果の概要(英文):Partial differential equations (PDEs), which expresses some relations using derivatives of unknown functions, frequently occur when natural phenomena in the world are modeled as mathematical problems. In the field of natural science, it is a subject of research to solve such PDEs mathematically or numerically to specify the unknown function. In this study, we have developed a computer-assisted method to numerically verify the existence/non-existence of solutions to nonlinear parabolic PDEs, which appear in the combustion theory of solid fuel and in the mathematical model of biological growth. Such a method validates whether the exact solution exists in the neighborhood of a numerically computed approximate solution. This is called verified numerical computations and is gaining attention as a modern approach to mathematical analysis of differential equations.

研究分野：数値解析

キーワード：精度保証付き数値計算 非線形放物型偏微分方程式 解の数値的検証 爆発問題 ケラー・シーゲル方程式系

### 1. 研究開始当初の背景

本研究で対象とする非線形放物型方程式は固体燃料の燃焼理論や生物増殖の数理モデル、あるいはナビエ-ストークス方程式を研究するためのヒルベルト空間上の抽象的常微分方程式としての問題など様々な状況において現れ、その解析には数学のみならず自然科学の分野で高い関心が寄せられている。理論的な解析手法によって定性的な性質が数多く得られている一方で、研究開始当初は定量的な解析結果がほとんど存在しなかった。特に、数値計算を用いてもとの方程式の爆発時刻を推定する手法が提案されていたが、計算に生じる誤差が原因となり、本質的な解決策とはなり得なかった。

### 2. 研究の目的

本研究課題では、「精度保証付き数値計算」という数値計算に生じる近似誤差（離散化誤差、打ち切り誤差、丸め誤差等）をすべて評価し、数値計算によって数学的に正しい結果を得る方法を利用し、非線形放物型方程式の解について

- (1) 時間局所存在に関する数値検証理論を構築する
- (2) 時間大域存在する解を捉える、計算機を援用した漸近解析手法を提案する
- (3) 爆発解の数値的存在検証および爆発時刻の解明への挑戦する

という3つの目標を達成するために、研究を遂行した。

### 3. 研究の方法

非線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算理論を構築するために、解析半群あるいは発展作用素を用いた不動点定式化を利用し、適切な関数空間のもとで解が局所一意存在する十分条件をバナッハの不動点定理から導く。この十分条件は精度保証付き数値計算を利用することで数値的に検証できる必要がある。

次に、大域解の検証は、定常解の近傍に解が時間大域的に存在する条件を数値検証できる形に導き、これを精度保証付き数値計算で検証する。定常解近傍の解の大域的なふるまいを保証する数値検証理論を確立する。

解がある時刻で発散する爆発問題に対しても精度保証付き数値計算を用いたアプローチを検討する。無限大を計算機で扱うことが不可能なため、解の相空間をコンパクトな多様体へと写像し、無限大を多様体上の境界に対応させることで有限な量で表現する。さらに有限時間の特異性を適切な変数変換により解消し、解を力学系の理論で扱えるように操作する。これにより、精度保証付き数値計算を用いて解の爆発時刻を具体的な実数区間に包含する。

本研究は一貫して、(関数)解析学と力学系そして精度保証付き数値計算理論の知識を効果的に融合することで実践可能である。

### 4. 研究成果

研究目的(1)について、これまでの研究成果により非線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算法はほぼ確立された。これは解析半群および発展作用素を利用する、近似解近傍における解の局所存在を数値検証する理論で、統一的なアプローチにより解の時間局所包含と解の存在時間の延長を数値検証することができるようになった。そのアプローチは一部、双曲型偏微分方程式に対する解の精度保証付き数値計算にも利用されつつあり、今後より一層の発展が期待できる。

研究目的(2)：時間大域存在する解については、解析半群を用いた不動点定式化が鍵となり、定常解へ漸近する時間大域解の定量的な明確化に成功した。これまでの精度保証付き数値計算理論の研究成果により定常解の存在は数値的に検証することが可能であり、本研究によって、定常解近傍での解の漸近挙動を数値計算により把握することができるようになった。これは力学系というbasinの構成に対応しており、精度保証付き数値計算の無限次元力学系への初歩的な応用例と解釈することもできる。

さらに研究目的(3)の爆発問題に対しては、ある程度広いクラスの非線形常微分方程式系の初期値問題に対して、解の爆発時刻を厳密に包含する精度保証付き数値計算を用いたアプローチが構築できた。全体的に時空の特異性解消が課題となり、これを利用することで常微分方程式の解の爆発問題は取り扱うことができるようになっている。しかし、偏微分方程式の解の爆発については適切な位相の導入に対して種類が無数にあり、このどれもが違う特徴を持つため、これらを慎重に選び、適切な位相による時空特異性の解消が今後必要となる。これは今後の課題である。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

1. A. Takayasu, M. Mizuguchi, T. Kubo, and S. Oishi: "Accurate method of verified computing for solutions of semilinear heat equations", *Reliable computing*, Vol. 25, pp. 74-99, July 2017.  
(<https://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/volume-25/reliable-computing-25-pp-074-099.pdf>)
2. M. Mizuguchi, A. Takayasu, T. Kubo, and S. Oishi: "A method of verified computations for solutions to semilinear parabolic equations using semigroup theory", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 55, No. 2, pp. 980-1001, Apr. 2017. (DOI:10.1137/141001664)

3. M. Mizuguchi, A. Takayasu, T. Kubo, and S. Oishi: "Numerical verification for existence of a global-in-time solution to semilinear parabolic equations", J. Comput. Appl. Math., Vol. 315, pp. 1-16, May 2017. (DOI:10.1016/j.cam.2016.10.024)
  4. A. Takayasu, K. Matsue, T. Sasaki, K. Tanaka, M. Mizuguchi, and S. Oishi: "Numerical validation of blow-up solutions of ordinary differential equations", J. Comput. Appl. Math., Vol. 314, pp. 10-29, Apr. 2017. (DOI:10.1016/j.cam.2016.10.013)
  5. A. Takayasu, M. Mizuguchi, T. Kubo, S. Oishi: "Verified Computations for Solutions to Semilinear Parabolic Equations Using the Evolution Operator", in Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences, Volume 9582 of the series Lecture Notes in Computer Science, pp. 218-223, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. (DOI:10.1007/978-3-319-32859-1\_18)
  6. M. Mizuguchi, A. Takayasu, T. Kubo, and S. Oishi: "On the embedding constant of the Sobolev type inequality for fractional derivatives", NOLTA, IEICE, Vol. 7, No. 3, pp. 386-394, Jul. 2016. (DOI:10.1587/nolta.7.386)
- [学会発表](計 39 件)
1. 高安亮紀: "半群理論を利用する発展方程式に対する解の精度保証付き数値計算", 日本数学会 2018 年度年会, 東京大学駒場キャンパス, 東京都目黒区 (2018/3/21).
  2. 高安亮紀: "非線形熱方程式の複素時間変数における解の挙動とその精度保証付き数値計算について", 2018 年 軽井沢グラフと解析研究集会, 日本大学軽井沢研修所, 長野県北佐久郡軽井沢町 (2018/2/13).
  3. 高安亮紀, 松江要: "擬斉次コンパクト化を利用する爆発解の精度保証付き数値計算", 2017 年度応用数学合同研究集会, 龍谷大学 瀬田キャンパス (2017/12/14).
  4. 高安亮紀: "非線形熱方程式の複素時間における解の挙動と精度保証付き数値計算", 第 1 回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会 (NVR 2017), 西日本総合展示場, 福岡県北九州市 (2017/12/10).
  5. Akitoshi Takayasu: "Verified computations for solutions to 1-dimensional advection equations with variable coefficients", Dagstuhl Seminar 17481, Wadern, Germany (2017/11/27).
  6. 高安亮紀: "常微分方程式系に対する爆発解の精度保証付き数値計算", 東大数理情報第 3 研究室輪講, 東京大学 本郷キャンパス (2017/10/18).
  7. 高安亮紀: "擬斉次コンパクト化を利用する爆発解の数値的検証理論と応用", 筑波大学エネルギー環境学域懇談会, 筑波大学 筑波キャンパス (2017/9/26).
  8. 尹授老, 高安亮紀, 遠藤靖典: "点列空間上での変数係数 1 次元移流方程式に対する解の精度保証付き数値計算", 日本応用数理学会 2017 年度年会, 武蔵野大学 有明キャンパス (2017/9/6).
  9. Akitoshi Takayasu: "Rigorous numerical computations for 1-dimensional advection equations with variable coefficients", Workshop for young scholars Control and inverse problems on waves, oscillations and flows - Mathematical analysis and computational methods -, Kyoto, Japan (2017/8/21).
  10. 高安亮紀, 尹授老, 遠藤靖典: "Fourier-Chebyshev スペクトル法を用いた変数係数 1 次元移流方程式の精度保証付き解法", 第 46 回数値解析シンポジウム, グリーンパーク想い出の森, 滋賀県高島市 (2017/6/30), 講演予稿集 pp.111-114.
  11. Akitoshi Takayasu, Kaname Matsue: "Numerical validation of blow-up solutions via quasi-parabolic compactifications", The International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2017 (INVA 2017), Okinawa, Japan (2017/3/15).
  12. 尹授老, 高安亮紀: "スペクトル法を用いた変数係数 1 次元移流方程式の精度保証付き解法", 日本応用数理学会 2017 年研究部会連合発表会, 電気通信大学 (2017/3/7).
  13. 高安亮紀: "放物型方程式の初期値問題に対する精度保証付き数値計算法について", 非線形現象と高精度高品質数値解析, 富山大学 五福キャンパス (2017/2/15).
  14. 高安亮紀: "非線形方程式に対する解の精度保証付き数値計算", 日本応用数理学会 3 部会連携「応用数理セミナー」, 東京大学 本郷キャンパス (2016/12/27). (講演スライド)
  15. 高安亮紀, 水口信, 久保隆徹, 大石進一: "時間発展問題の精度保証付き数値計算に現れる誤差伝搬の縮小技術", 2016 年度応用数学合同研究集会, 龍谷大学 瀬田キャンパス (2016/12/15).
  16. 高安亮紀: "常微分方程式の爆発解に対

- する数値的検証法", 日本学術会議 第 6 回 計算力学シンポジウム, 日本学術会議講堂 (2016/12/5).
17. 高安亮紀, 水口信, 久保隆徹, 大石進一: "放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算法について", SADO Workshop on Numerical Analysis and Related Topics, ホテルファミリーオ佐渡相川 (2016/11/20).
  18. Akitoshi Takayasu, Makoto Mizuguchi, Takayuki Kubo, Shin'ichi Oishi: "Computable norm bounds of the evolution operator using spectral properties", The 35th JSST Annual Conference International Conference on Simulation Technology (JSST2016), Kyoto, Japan (2016/10/28).
  19. 高安亮紀: "発展作用素に基づく非線形熱方程式に対する解の精度保証付き数値計算法", 東京理科大学 理工学部数学科 談話会, 東京理科大学 野田キャンパス (2016/10/27).
  20. Akitoshi Takayasu, Makoto Mizuguchi, Takayuki Kubo, Shin'ichi Oishi: "On verification methods for parabolic partial differential equations using the evolution operator", the 17th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetics and Verified Numerics (SCAN 2016), Uppsala, Sweden (2016/9/28).
  21. Akitoshi Takayasu, Kaname Matsue, Takiko Sasaki, Kazuaki Tanaka, Makoto Mizuguchi, Shin'ichi Oishi: "Verified numerical computations for blow-up solutions of ODEs", the 17th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetics and Verified Numerics (SCAN 2016), Uppsala, Sweden (2016/9/26).
  22. Akitoshi Takayasu, Makoto Mizuguchi, Takayuki Kubo, Shin'ichi Oishi: "Computable estimates of the evolution operator based on the operator theory", Czech-Japanese-Polish Seminar in Applied Mathematics 2016 (CJPS 2016), Krakow, Poland (2016/9/8).
  23. Makoto Mizuguchi, Kouta Sekine, Akitoshi Takayasu, Takayuki Kubo, Shin'ichi Oishi: "Verification algorithm for enclosing a mild solution of semilinear heat equations", The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia 2016), Niigata, Japan (2016/8/2).
  24. Akitoshi Takayasu, Makoto Mizuguchi, Takayuki Kubo, Shin'ichi Oishi: "Concatenation scheme for verified inclusion of solutions to semilinear heat equations", The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia 2016), Niigata, Japan (2016/8/2).
  25. Akitoshi Takayasu, Makoto Mizuguchi, Takayuki Kubo, Shin'ichi Oishi: "Verified Computations for Solutions to Nonlinear Heat Equations Based on Fractional Powers of a Positive Operator and the Evolution Operator", 5th European Seminar on Computing (ESCO 2016), Pilsen, Czech Republic (2016/6/9).
  26. 高安亮紀: "間違える数値計算とその対策", 第144回リスク工学研究会 (RERM), 筑波大学 筑波キャンパス (2016/5/16).
  27. 水口信, 高安亮紀, 久保隆徹, 大石進一: "重み付きラプラス作用素の分数べきに対する計算可能なソボレフの埋め込み定数", 日本数学会 2016 年度年会, 筑波大学 筑波キャンパス (2016/3/19).
  28. 高安亮紀, 水口信, 久保隆徹, 大石進一: "正值作用素の分数冪と発展作用素を用いる非線形熱方程式に対する解の精度保証付き数値計算法", 日本数学会 2016 年度年会, 筑波大学 筑波キャンパス (2016/3/19).
  29. 高安亮紀: "常微分方程式の爆発解に対する数値的検証法について", 応用数学セミナー@芝浦工大「爆発問題の数値解析」, 芝浦工業大学大宮キャンパス (2016/3/7).
  30. 高安亮紀, 松江要, 佐々木多希子, 田中一成, 水口信, 大石進一: "放物面コンパクト化を用いる常微分方程式の爆発解の数値的検証法", 日本応用数理学会 2016 年研究部会連合発表会, 神戸学院大学 ポートアイランドキャンパス (2016/3/5).
  31. 高安亮紀, 水口信, 久保隆徹, 大石進一: "発展作用素を用いた半線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算法", 京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会「現象解明に向けた数値解析学の新展開」, 京都大学数理解析研究所 (2015/11/19).
  32. Akitoshi Takayasu, Makoto Mizuguchi, Takayuki Kubo, Shin'ichi Oishi: "Verified computations for solutions to semilinear parabolic equations using the evolution operator", Sixth International Conference on Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences (MACIS2015), Berlin, Germany (2015/11/12).
  33. Akitoshi Takayasu, Makoto Mizuguchi, Takayuki Kubo, Shin'ichi Oishi:

- "Numerical existence theorem for solutions of semilinear parabolic equations using the evolution operator", The 34th JSST Annual Conference International Conference on Simulation Technology (JSST2015), Toyama, Japan (2015/10/12).
34. Makoto Mizuguchi, Kouta Sekine, Akitoshi Takayasu, Takayuki Kubo, Shin'ichi Oishi: "Verified computations for solutions of semilinear heat equations using an analytic semigroup generated by a self-adjoint operator", The 34th JSST Annual Conference International Conference on Simulation Technology (JSST2015), Toyama, Japan (2015/10/12).
35. 高安亮紀, 松江要, 佐々木多希子, 田中一成, 水口信, 大石進一: "Verified numerical enclosure of blow-up time for ODEs", 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学 (2015/9/16).
36. 水口信, 関根晃太, 高安亮紀, 久保隆徹, 大石進一: "ある自己共役作用素から生成される解析半群を用いた半線形熱方程式の解の数値的検証法", 日本応用数理学会 2015 年度年会, 金沢大学 角間キャンパス (2015/9/9).
37. 高安亮紀, 松江要, 佐々木多希子, 田中一成, 水口信, 大石進一: "常微分方程式の爆発解に対する精度保証付き数値計算", 日本応用数理学会 2015 年度年会, 金沢大学 角間キャンパス (2015/9/9).
38. 高安亮紀, 松江要, 佐々木多希子, 田中一成, 水口信, 大石進一: "常微分方程式の解の爆発時刻に対する精度保証付き数値計算", 第 44 回数値解析シンポジウム, ぶどうの丘, 山梨県甲府市 (2015/6/10), 講演予稿集 pp.135-138.
39. 高安亮紀: "解析半群を利用した半線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算法", 数値解析セミナー(東大), 東京大学 駒場キャンパス (2015/4/27).

〔図書〕(計 0 件)

なし

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

なし

取得状況(計 0 件)

なし

〔その他〕

ホームページ等

なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高安 亮紀 (TAKAYASU AKITOSHI)

筑波大学・システム情報系・助教

研究者番号: 60707743

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし

### (4) 研究協力者

大石 進一 (OISHI SHIN'ICHI)

早稲田大学・理工学術院・教授

久保 隆徹 (KUBO TAKAYUKI)

筑波大学・数理物質系・講師

松江 要 (MATSUE KANAME)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研

究所 / 九州大学カーボンニュートラル・エネ

ルギー国際研究所・助教

水口 信 (MIZUGUCHI MAKOTO)

早稲田大学・理工学術院・次席研究員