様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：８２６４５
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１８２８６

研究課題名（和文）双曲型ナビエ・ストークス方程式に基づいた高レイノルズ数遷音速流解析の革新的高速化

研究課題名（英文）Convergence Acceleration of High Reynolds Number Transonic Flow based on Hyperbolic Navier-Stokes Equations

研究代表者
橋本　敦（Hashimoto, Atsushi）

国立研究開発法人宇宙航空研究開発機構・航空技術部門・主任研究開発員

研究者番号：３０４６２８９９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：近年提案された双曲型ナビエ・ストークス方程式に基づいた解析手法を、航空機の数値流体解析に適用する研究である。双曲型の手法を3次元に拡張し、非構造格子流体解析ソルバのFaSTARに組み込んだ。元々のナビエ・ストークス方程式は5本の方程式であるが、双曲型を採用すると、微分量の方程式が増えるため、20本の方程式になる。これを陰的に時間発展する場合、20×20の行列を扱う必要があり、計算コストが大きな課題になる。本研究では、ヤコビアン行列の計算を簡略化する方法を提案し、陰解法の計算コストを格段に下げ、従来手法よりも高速に計算できることを実証した。

研究成果の概要（英文）：We applied a numerical method based on hyperbolic Navier-Stokes equations to computational fluid dynamics (CFD) on aircraft. We extended the method for three-dimensional problems and implemented it with an unstructured-grid flow solver FaSTAR. The original Navier-Stokes equations are five equations, whereas the hyperbolic equations are 20 equations since the equations of derivative values are added. When we solve the equations with an implicit time-evolution method, we need to solve the 20×20 matrix problems. In this research, we proposed an approximation method of the matrix. We showed that the approximation method can reduce the computational time remarkably and it is faster than the conventional CFD method.

研究分野：数値流体力学

キーワード：CFD　数値流体力学　圧縮性流体力学　収束加速　非構造格子　双曲型

１．研究開始当初の背景

航空機に働く空気力を解析する際には、圧力と摩擦による力を精度良く求める必要がある。特に、航空機は流線型であり、自動車等に比べて圧力抵抗が小さいため、圧力抵抗と摩擦抵抗はほぼ同じ大きさになる。圧力の予測精度を向上するためには、圧力変化の大きい、翼の前縁などの格子を細分化する必要がある。一方、摩擦力を正しく計算するには、境界層が存在する壁面近傍の格子を細分化する必要がある。

実用的には、Reynolds-Averaged Navier-Stokes（RANS）を用いた定常解析がよく使用される。また、最近では、定常解析で予測が困難な問題に対して、Large Eddy Simulation（LES）を組み合わせた RANS/LES ハイブリッド法が使用される。どちらの解析においても、RANS で境界層を計算するため、壁面近傍の格子には、非常に薄い格子（アスペクト比が 10^3～10^4）が用いられる。また、その領域を時間刻みが大きくとれる陰解法で解くことになる。

非定常解析の例として、高速バフェット（高迎角で飛行するときに、衝撃波が前後に振動する現象）を RANS/LES ハイブリッド法で解いたときの結果を図 1 に示す。前縁付近の衝撃波が振動しており、実験に近い現象を再現することができた。しかし、陰解法の収束に問題があり、この計算には膨大な時間を費やした。その理由を探るため、陰解法で内部反復を 20 回したときの残差を調べたところ、壁付近に大きな残差が分布している（＝壁付近だけ収束が遅い）ことが分かった（図 2)。通常、壁から離れたところでは格子サイズが大きいので、その部分の収束は早い。一方、壁付近の格子は薄いので、収束が非常に遅い。内部反復回数を 20 回、40 回、80 回と変化させて 3 ケースを計算したところ、衝撃波の挙動がいずれも異なることが分かった。まだまだ収束が不十分であることは明らかであり、これが非定常解析の大きな課題である。

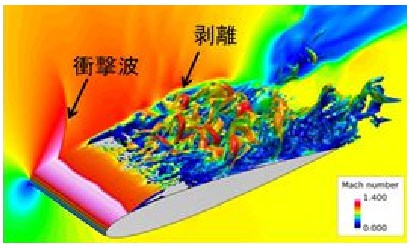

図１　高速バフェットの解析

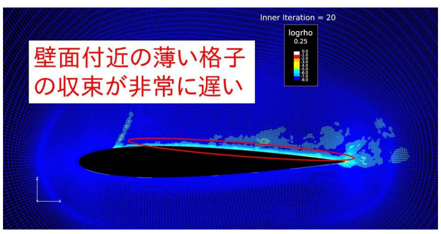

図 2　残差の分布

２．研究の目的

本研究では、上記の収束に関する問題を解決するため、米国 National Institute of Aerospace（NIA）の西川博士によって提案された「双曲型 Navier-Stokes 方程式」を拡張する。この手法は新しく、移流拡散方程式（文献①）で有効性を確認した後、2014 年に初めて Navier-Stokes 方程式に適用されている（文献②）。従来は安定性を高めるための緩和法として使用されていたが、収束を加速するために使用されるようになったのは最近である。

この手法を簡単に拡散方程式で説明したものを図 3 に示す。新たに 1 階微分の変数 p の方程式を追加することで、2 階微分を無くす。こうすることで、もともと放物型であった拡散方程式が、“双曲型”の拡散方程式に変換できる。定常状態に収束すれば、“双曲型”拡散方程式は、元々の拡散方程式に等価である。この手法のメリットは、式を双曲型にすることで、収束に必要な計算反復回数を大きく減らせることである。格子サイズを h とすると、もともとの拡散方程式では 2 階微分が含まれているため、収束に必要な反復回数は $1/h^2$ に比例する。一方、1 階微分のみの双曲型拡散方程式では $1/h$ に比例する。つまり、非定常解析で問題となった薄い格子での収束性が大きく改善されることになる。

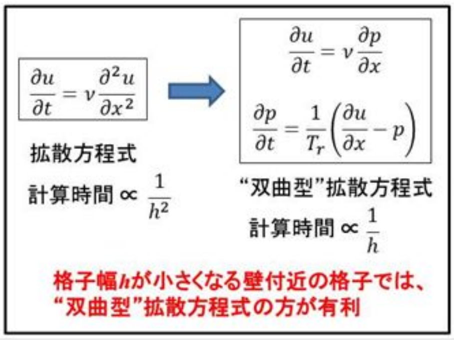

図 3　双曲型方程式

これまでに、2 次元の層流解析にこの手法を使うと、計算時間を約 1/10 に短縮できることが実証されている（文献②）。しかし、3 次元化はまだ行われていない。そこで、本研究では、双曲型 Navier-Stokes 方程式を拡張し、実用的な 3 次元解析に適用できるようにする。高速バフェットの解析でボトルネックとなっていた、壁付近の収束性を改善し、計算時間を大幅に短縮できることを実証することが、本研究の目的である。

３．研究の方法

研究代表者は、航空機・宇宙機の空力解析

に広く使用されている圧縮性流体解析ソルバ FaSTAR（文献③）を開発してきた。高速な計算アルゴリズムとコーディング手法で、世界トップレベルの高速性を実現することに成功した。しかし、非定常解析においては、壁面付近の薄い格子の収束が非常に遅いため、高速な FaSTAR でも多大な計算時間を要することが分かった。そこで、本研究では、近年新たに提案された双曲型 Navier-Stokes 方程式を 3 次元に拡張し、FaSTAR に組み込むことで、計算時間をさらに短縮する。

４．研究成果

まず、双曲型の効果を確認するために、Method of Manufactured Solutions（MMS）で１次元問題で性能を確認した。使用した方程式は下記の式(1)であり、移流拡散方程式にソース項 ***q(x)*** を追加したものである（文献④）。この方程式の理論解は式(2)であり、境界層を模擬した分布になっている。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x)\ \ (0\le x\le 1)$$
$$q(x)=\frac{\pi}{Re}[a\cos(\pi x)+\pi\nu\sin(\pi x)] \tag{1}$$
$$u(0)=0,\ u(1)=1$$

$$u_{exact}(x)=\frac{\exp(-Re)-\exp(xRe-Re)}{\exp(-Re)-1}+\frac{1}{Re}\sin(\pi x) \tag{2}$$

双曲型で解いた結果を図 4 に示す。式(2)の理論解と同じ解が得られていることを確認した。Re 数が大きくなるに従って、x=1 付近で大きく変化する。x=1 が壁だとすると、これは境界層の速度分布に類似している。

図 5 に、従来の手法と双曲型の収束履歴を比較したものを示す。時間発展には陽解法を採用した。今回は、残差が 10^{-6} まで収束するために必要な反復回数を比較した。従来の手法では、収束するまでに、非常に多くの反復回数が必要である。一方、双曲型を用いると、格段に速く収束していることがわかる。次に、格子数を変えて、同様の計算を実施し、収束に必要な反復回数を比較した（図 6）。従来手法に比べ、約 100 倍の高速化が得られている。従来手法では 2 次の傾きだが、双曲型では 1 次になっており、図 3 に示した双曲型の特性が再現できていることが確認できた。このため、大規模解析で格子数が増えたとき（格子幅が小さくなったとき）に、有効な手法である。

また、陰解法についても効果を確認した。Jacobi 法、GS 法、SGS 法、LU-SGS 法の 4 種類の手法を比較したところ、LU-SGS 法が最も安定で高速に計算できることが分かった。図 7 には、LU-SGS 法で計算したときの結果を追加した。陽解法から陰解法に変えることで、さらに約 10 倍高速化ができることを確認した。

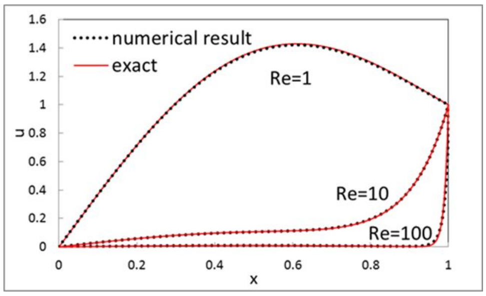

図４　理論解

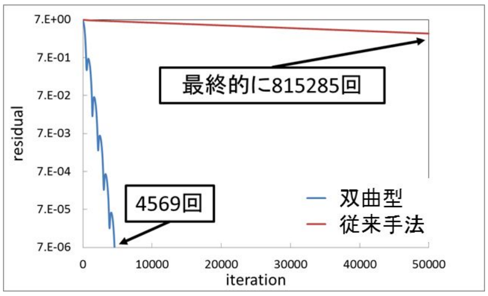

図５　収束履歴（陽解法）

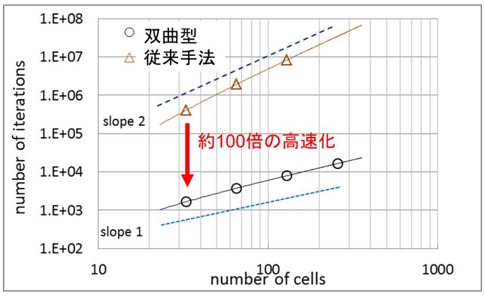

図６　反復回数（陽解法）

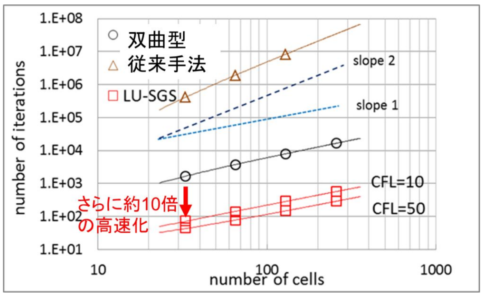

図７　反復回数（陰解法）

次に、3 次元化を検討した。3 次元の Navier-Stokes 方程式を双曲化すると、密度、速度 3 成分、温度に対する 3 方向の勾配値の方程式が加わるので、計 20 本の方程式になる（文献⑤）。この方程式に対して、陰解法を適用するとヤコビアン行例が 20×20 になり、行列反転などの計算負荷が問題となる。そのため、本研究では、LU-SGS 法と同様の手法を双曲型に適用し、計算コストが低い陰解法を考案した。

ヤコビアン行列を計算するときに Rusanov 近似を適用した数値流束（式(3)）を採用する。ここで、$\boldsymbol{\Phi}$ は数値流束、$\boldsymbol{F}$ は流束、$\boldsymbol{U}$ は保存量、$\boldsymbol{\rho}_A$ はヤコビアン行列の最大固有値であり、下付き文字の $\boldsymbol{i}$ や $\boldsymbol{j}$ はセル番号を示す。

ρ_A は式(4)で計算する。ここで、ρ_A^i、ρ_A^v、ρ_A^a はそれぞれ非粘性、粘性、質量拡散ヤコビアン行例の最大固有値である。$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトル、$\boldsymbol{n}$ はセル面の法線ベクトル、$\boldsymbol{c}$ は音速、$\boldsymbol{\nu}_h$ と $\boldsymbol{\nu}_\rho$ 熱流束と質量拡散に関わる動粘性係数、T_h と T_ρ は熱流束と質量拡散に関わる緩和時間である。ヤコビアン行列はこの近似した流束を微分することで得られる（式(5)と(6)）。この近似を採用することで、行列反転を無くした所謂 Matrix-Free の陰解法を構築することが可能である。これにより、収束性が若干悪化するが、計算コストの削減効果が非常に大きいので、得られる効果は大きい。詳細については、検証計算で説明する。

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_j) - \rho_A(\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i)\right] \quad (3)$$

$$\rho_A = \rho_A^i + \rho_A^v + \rho_A^a = (|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}| + c) + \left(\sqrt{\nu_h/T_h}\right) + \left(\sqrt{\nu_\rho/T_\rho}\right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{U}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}_i} - \rho_A \mathbf{I}\right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{U}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \mathbf{U}_j} + \rho_A \mathbf{I}\right) \quad (6)$$

本計算では、JAXA で開発した高速流体解析ソルバ FaSTAR（文献③）に双曲型の手法を組み込み、解析を実施した。従来の手法で解いた場合と、双曲型を使用した場合を比較する。双曲型に関しては、厳密なヤコビアンを使用する場合と、上記の近似ヤコビアンを使用する場合の２つを比較する。流束については、Roe の風上法を採用した。従来法では勾配を最小二乗法で計算するが、双曲型では勾配値を持っているので、その値を再構築に使用した。時間発展には、全て LU-SGS 法を採用した。

考案した手法を検証するために、層流境界層を計算した。図 8 に、計算格子、境界条件を示す。計算格子には、格子密度の異なる 5 種類の格子を用いた。具体的には、a0～a4 の格子を用意し、格子数はそれぞれ 140、560、2,240、8,960、35,840 である。図 8 に示したものは最も粗い a0 格子である。上流は流入境界、下流は静圧を固定した流出境界、上面は遠方境界、下面は滑り有り/無しの壁である。一様流のマッハ数 M=0.5、レイノルズ数 Re=1.0×10^6 で計算した。

図 9 に a4 格子で得られた流速分布を示す。滑り無し壁の上面に、境界層が発達している様子がわかる。

まず、格子収束を確認するために、従来の手法と双曲型で抵抗値（摩擦抵抗）を計算した。図 10 に得られた結果を示す。横軸は格子幅の指標となる h_DoF = $1/(N_{eqs}N)^{1/3}$ である。N_{eqs} は式の数（従来の方法は 5、双曲型は 20）で、N は格子数である。図では、従来手法（Traditional)、近似手法を用いた双曲型（Hyperbolic(Approx))、ブラシウスの理論解（Balasius）を比較している。どちらの手法も理論解に収束しており、妥当な結果が得られている。また、従来の手法に比べて、双曲型が速く収束していることがわかる。a4 格子で計算した従来手法の結果と、a3 格子で計算した双曲型の結果がほぼ同じ精度で計算できている。つまり、双曲型を用いれば、少ない格子でも精度良く計算することが可能である。

次に、収束にかかる時間を比較する。ここでは、先ほど同等の精度で計算できていることを確認した２つのケース（従来手法の a4 格子と双曲型の a3 格子）を比較する。双曲型に関しては、近似解法（Hyperbolic(Approx)）と厳密解法（Hyperbolic(Exact)）を比較する。横軸を反復回数でプロットしたものを図 11 に示す。従来の手法と比較して、双曲型の方が速く収束しており、厳密なヤコビアンを用いた場合に、最も速く収束する。一方、横軸を CPU 時間でプロットしたものを図 12 に示す。厳密解法は計算コストが高いため、従来手法よりも時間がかかる。しかし、近似解法を用いることで、従来手法よりも速く計算することができた。残差が 10^{-15} に落ちるところで比較すると、双曲型の近似解法は、従来方法を 4 倍高速化できることがわかった。また、双曲型の厳密解法と比較すると、12.5 倍高速化できる。

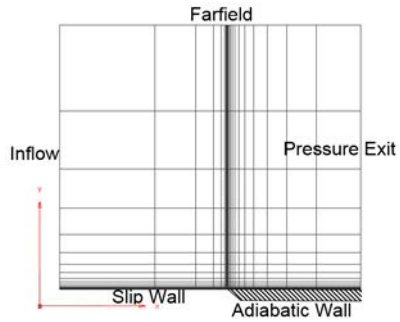

図 8　計算格子、境界条件（a0 格子）

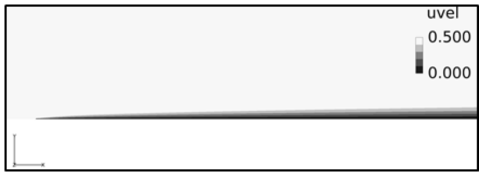

図 9　流速分布（a4 格子）

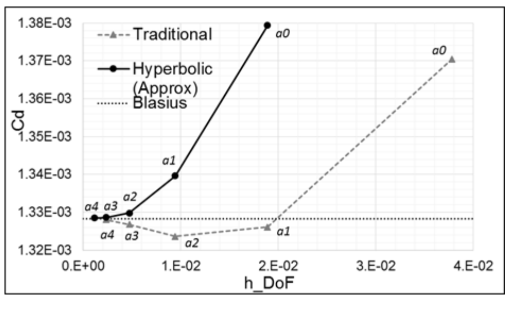

図 10　抵抗係数の格子依存性

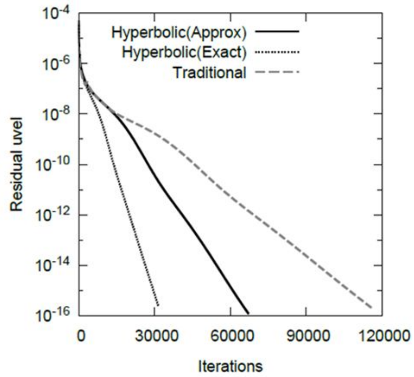

図 11　収束履歴（横軸：反復回数）

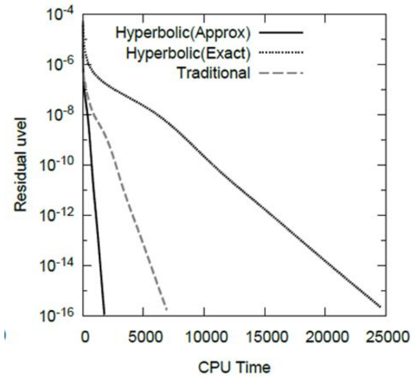

図 12　収束履歴（横軸：CPU 時間）

以上述べた成果を AIAA Scitech Forum と数値流体力学シンポジウムで発表し、AIAA Journal に投稿した。

＜引用文献＞

① Hiroaki Nishikawa, First, second, and third order finite-volume schemes for advection-diffusion, Journal of Computational Physics, 273, 2014, pp. 287-309.

② Hiroaki Nishikawa, First, Second, and Third Order Finite-Volume Schemes for Navier-Stokes Equations, AIAA paper 2014-2091, 2014.

③ 橋本敦，村上桂一，青山剛史，菱田学，坂下雅秀，ラフール・パウルス，高速な非構造格子流体ソルバ FaSTAR の開発，日本航空宇宙学会論文集，Vol.63，No.3，pp.96-105，2015.

④ Hiroaki Nishikawa, A first-order system approach for diffusion equation. II: Unification of advection and diffusion, Journal of Computational Physics, 229, 2010, pp.3989-4016.

⑤ Yoshitaka Nakashima, Norihiko Watanabe, Hiroaki Nishikawa, Hyperbolic Navier-Stokes Solver for Three-Dimensional Flows, AIAA paper 2016-1101, 2016.

５．主な発表論文等

〔学会発表〕（計　2　件）

① Tsukasa Nagao, Atsushi Hashimoto, Tetsuya Sato, "A Study on Time Evolution Method for Hyperbolic Navier-Stokes System", AIAA SciTech Forum, AIAA 2018-0370, 2018

② 長尾志，橋本敦，青山剛史，佐藤哲也，双曲型移流拡散方程式の時間発展法に関する検討，第 30 回数値流体力学シンポジウム，2016 年

６．研究組織

(1)研究代表者

橋本　敦　（HASHIMOTO, Atsushi）
国立研究開発法人宇宙航空研究開発機構・航空技術部門・主任研究開発員
研究者番号：３０４６２８９９

(2)研究協力者

長尾　志（NAGAO, Tsukasa）