1版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　５月１８日現在

機関番号：１７１０４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2019
課題番号：１５Ｋ２１０５８
研究課題名（和文）三階の偏微分方程式系の接触幾何学

研究課題名（英文）Contact geometry of partial differential equations of third order

研究代表者
野田　尚廣（Noda, Takahiro）

九州工業大学・大学院工学研究院・准教授

研究者番号：１０５９６５５５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：微分方程式は，世の中の様々な現象を分析するための重要な数学的概念である。とりわけ、二階の偏微分方程式は、波動方程式(双曲型)、熱方程式(放物型)、ラプラス方程式(楕円型)をはじめとして、数理物理学や工学における種々の重要なモデル現象を典型例に持つクラスで、伝統的に研究されてきた。一方で三階の偏微分方程式は、KdV方程式といった方程式(可積分系)などが断片的に発見されているものの、基礎付けの観点からしてもまだ不十分に思えたため、特に幾何学的な観点からこの方面の研究を遂行した。結果、幾何学的枠組みを明確に与え、いくつかの基礎的な特徴づけやその背後にある構造を明らかにすることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
微分方程式は，世の中の様々な現象を分析するための重要な数学的概念である。ニュートンの運動方程式をはじめとして、他にも波動方程式(双曲型)、熱方程式(放物型)、ラプラス方程式(楕円型)など、数理物理学や工学における種々の重要なモデル現象を記述できる。この微分方程式は本来解析学の分野に属する研究対象であるが、これを幾何学の分野の研究対象(微分式系)として視覚化し、空間図形的観点から微分方程式がもつ様々な性質を浮きぼりにするのが私の研究内容である。

研究成果の概要（英文）：Differential equation is an important mathematical concept for analyzing various phenomena in the world. In particular, second-order partial differential equations provide typical examples describing various important model phenomena in mathematical physics and engineering, including the wave equation (hyperbolic type), heat equation (parabolic type), and Laplace equation (elliptic type). As mentioned above, second order equations have been traditionally studied.
On the other hand, for third-order partial differential equations, several progress has been made, including the discovery of special equations (integrable systems) such as the KdV equation. However, it still seemed insufficient from the point of view of the geometric foundation. Hence, in this research project, I formulated rigorously a geometric theory of third-order partial differential equations.including a classification into several classes and characterization of several aspects.

研究分野：微分方程式の幾何学

キーワード：微分式系の理論

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

研究代表者の研究テーマは、「微分方程式の(接触)幾何学」である。 研究概要について大ざっぱに言えば、微分方程式という解析的対象を微分式系という幾何的対象にデータ変換し、微分式系の幾何学理論を用いて方程式(空間)の構造を解析したり、方程式に付随する幾何構造を調べたりする学問といえる.

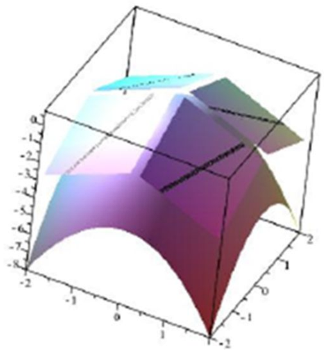

図１　微分式系(接分布)のイメージ

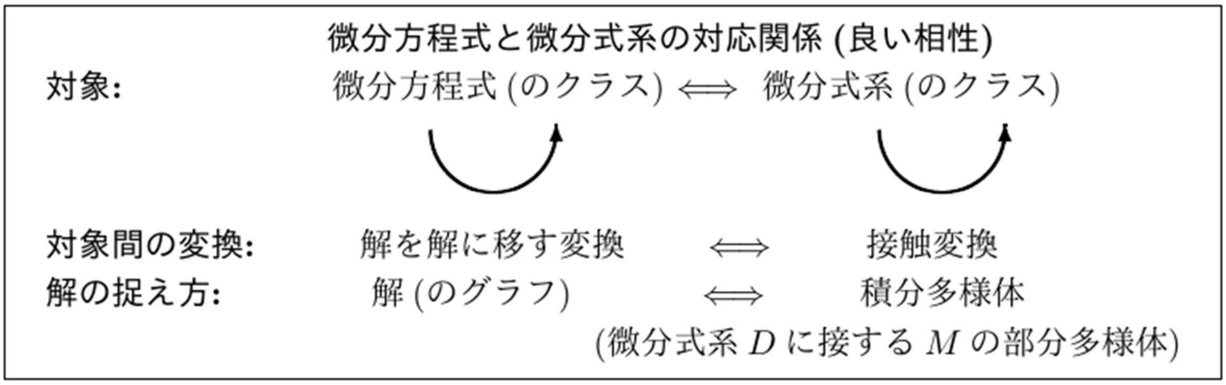

図 2 微分方程式(解析的対象)と微分式系(幾何的対象)との間の対応

その際方程式(空間)がもつ性質の記述に、Lie 環をはじめとする代数構造も有用であるために、結果として解析学・代数学・幾何学の主要な三分野や幅広い知見が交錯する魅力がある。この分野は 19 世紀におけるモンジュ、リー、ダルブー、グルサー、 カルタン等の研究に端を発し、20 世紀における様々な研究者らの現代的解釈のもと、ある一定の理解と進展がもたらされている。とりわけ、数理物理学や工学といった幅広い分野への応用性に優れている二階の偏微分方程式系に関しては、厳密な幾何学的基礎付けやその枠組みのもとでの様々な特徴づけが得られている。しかしながら、いまだ不明な事柄も多く見られ、特に三階以上の高階の偏微分方程式系に関しては、(当該分野からの)幾何学的な基礎付けすら満足に与えられてはいないと言っても過言ではなかった。

２．研究の目的

上記の研究背景のもとで、当該分野での研究進展におけるひとつの方向性として、二階の偏微分方程式系の接触幾何学の高階化、とりわけ三階の偏微分方程式系の接触幾何学を構築することを目的として設定した。三階の偏微分方程式は、ソリトン方程式(可積分系)として広く知られている KdV 方程式など重要な方程式が発見されるなど、二階同様に興味深い世界が拡がっていることが期待されたために、当該分野からのアプローチを与えることは意義がある仕事と思われたからである。また本研究のもとで、上記に挙げた KdV 方程式のような、何らかの意味での興味深い方程式系を発見することも目標であった。

３．研究の方法

上記の目標のもとで研究に着手したが、まず初めに行ったのが、これまでの先駆者たちの仕事の洗い出しとその分析である。具体的には、当該分野の創始者ともいえるエリー・カルタンの研究対象の扱い方、さらには国内における主要な業績を残された田中昇、森本徹、山口佳三諸氏の仕事を適宜調べた。とりわけ山口佳三氏は二階の偏微分方程式系の接触幾何学を、現代的な観点か

ら非常に明瞭に定式化されており、これを丁寧に分析した結果、適切に変化・進化させていくことで目的である三階への移行がある程度可能であることに気づいた。また森本徹氏による、正則性をみたさない(ある種ワイルドな)状況での代数構造を用いた方程式の扱いも有効であることが判明したため、こちらも適宜応用しようと考えた。

４．研究成果
上記のアイデアのもとで、三階の偏微分方程式系の接触幾何学を、厳密かつすっきりした形で定式化することに成功した。特にこれまでの先駆者たちの二階の偏微分方程式に関する仕事と適宜比較することで、高階化における特有の性質も見えたことは良かったと思う。これに伴い主に得られた結果としては、方程式系の間の(内在的な)解を解に移す変換である接触変換のもとでの不変量として階別冪零 Lie 環を定義し、この不変量の下で二変数一未知関数の三階の偏微分方程式系に関しては、単独型方程式のクラスと三つの連立型方程式(過剰決定系)のクラスを四つのサブカテゴリーに粗く分類できた。また各クラスにおける基本性質(解が豊富に存在する包合性、解空間の有限次元性など)も明らかにできた。さらには上記の 2 つのクラスの間にはある種の双対性が存在することが、この観点のもとで非常に明瞭になった。これらの基礎付けとして得られた結果は、論文としてまとめ現在学術雑誌へ投稿中である。またこれに続いて具体例の計算に役立つ道具の開発にも着手した。上記における分類は階別冪零 Lie 環を用いて与えられているために、具体的な方程式に対してこの不変量を計算することは容易ではない。そこで与えられた方程式の定義関数から、この Lie 環の分類リストに対応する(微分)不変式を定式化できれば計算が楽になると思い、この方面の研究にも着手した。不変式論そのものはケイリー、シルベスター、クレブシュ、ゴルダンといった先駆者らの古典論やヒルベルトの研究から今に至る現代的理論など膨大な結果が存在するが、研究代表者は特に古典論にヒントを求めた。結果として、三階の偏微分方程式系の接触幾何学の枠組みを、(微分不変式論という形で)古典論における実係数の三次形式論にリンクさせることが出来たので、三次形式論における不変式(判別式など)の結果を上記の枠組みに応用することで、上記の階別冪零 Lie 環の分類リストに対応させる微分不変式を、単独型方程式に対しては見つけることが出来た。これは、方程式系の定義関数の偏微分から直接計算できるため、先程の Lie 環の計算よりはシュミレーションに優れたものといえる。この概念のもと、方程式系を低階(2 階以下)の項で
摂動しても、あまり上記の分類には影響を与えないことも実験から見えてきた。これをもとにより多くの具体例をサンプルとして扱い、構造を調べることが出来ると期待される。また、上記の Lie 環による分類において、二つの連立方程式(過剰決定系)においてはまだ納得のいく結果を残せていない。ただし、このクラスにはある種の自己双対性が眠っている兆候が見て取れるので、興味深い世界が横たわっていることは期待される。あとはそれをどのように表現するかが今後の課題である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Takahiro Noda	４．巻 Volume 47, Number 3
２．論文標題 On a certain invariant of differential equations associated with nilpotent graded Lie algebras	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 445--464
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Takahiro Noda	４．巻 47
２．論文標題 On prolongations of second-order regular overdetermined systems with two independent and one dependent variables	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 63--86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Takahiro Noda and Kazuhiro Shibuya	４．巻 82
２．論文標題 Type-changing PDE and singularities of Monge characteristic systems	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	６．最初と最後の頁 57--73
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08210000	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　2件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 野田尚廣
２．発表標題 二階の偏微分方程式系の変換理論に向けて～明示的視点から～
３．学会等名 北九州ワークショップ2018「不変式論と微分幾何学への応用」
４．発表年 2018年

１．発表者名 野田尚廣
２．発表標題 二階のジェット空間上の接触変換再考～明示的視点から～
３．学会等名 山口佳三先生退職記念研究集会（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 野田 尚廣
２．発表標題 三階の偏微分方程式系の接触幾何学
３．学会等名 部分多様体論と種々の幾何構造（招待講演）
４．発表年 2015年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考