

令和 元年 9 月 2 日現在

機関番号：14301

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化）

研究期間：2016～2018

課題番号：15KK0162

研究課題名（和文）Random Matrix Theory and its applications（国際共同研究強化）

研究課題名（英文）Random Matrix Theory and its applications(Fostering Joint International Research)

研究代表者

COLLINS Benoit (Collins, Benoit)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：20721418

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 10,200,000円

渡航期間： 26ヶ月

研究成果の概要（和文）：本研究課題は様々な方向への研究成果に繋がっている。Brannanとの共同研究で、Temperley Lieb代数の構造についての長年のJones予想を解決した。YinとZhongと重要なPPT-square予想がある程度の条件のもとで成立することを証明した。大坂らとk-正値性に関する新しい例を構成した。長谷部らと巡回単調独立性の行列モデルを得た。Novakらと、 $GL_N(\mathbb{C})$ の既約表現の典型的な分解から、BPP観測量の大量の法則を示した。また新しく、パリENSのVertと機械学習について、オタワ大のGiordanoと量子情報理論についての共同研究が始まった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題の最大の成果は、パリ・アンリ・ポアンカレ研究所で開催された3ヶ月間のAnalysis on QITの期間に、研究を加速的に進めたことである。その間、代表者や日本から来た私の共同研究者らがランダム行列理論、自由確率論の研究者だけでなく、それらを応用した量子情報理論の専門家との議論を通じて、研究代表者らの研究結果を幅広く広める機会となった。このイベントに前後して、フランスやカナダの共同研究者らとのランダム行列理論、自由確率論及びそれらの量子情報理論や機械学習への応用について議論したことは日本に最新の新しい話題を広めるきっかけになるだろう。

研究成果の概要（英文）：The research conducted under this grant lead to research results in various directions. First, together with Brannan, we solved a long standing conjecture of Jones about the structure of the Temperley Lieb algebra. Then, with Yin and Zhong we proved that the important PPT-square conjecture is typically satisfied. Next, together with Osaka and Sapra, we used representation theory to give new examples related to k-positivity. Together with Hasebe and Sakuma we obtained a matrix model for cyclic monotone independence. With Novak and Sniady we studied typical decomposition of irreducible representations of  $GL_N(\mathbb{C})$  and proved that Law of Large Number for the BPP observables. Finally, some work was initiated with Vert at ENS on machine learning, and with Giordano in Ottawa on quantum information theory.

研究分野：Random Matrix Theory, Quantum Information Theory

キーワード：Random Matrix Theory

## 1. 研究開始当初の背景

採択されていた科研費若手研究(B)平成26~28年度「Random Matrix Theory and its applications」で次の研究を行ってきた:

(1) モーメント法に基づくランダム行列の基礎理論を深めること。これは特に研究代表者らが積み上げてきた Weingarten calculus や作用素の operator norm の積分計算や組み合わせ理論的な技術の研究を含んでいる,

(2) ランダム行列理論と作用素論の関係を特に(1)の手法や自由確率論を通して研究する,

(3) (1), (2)のランダム行列研究をもとにランダム行列の量子情報理論への応用を研究する,

これらは順調に進んでおり、特に、新しいランダム行列理論の量子情報理論への応用が見つかった。この量子情報理論への応用が、評価され、量子情報理論に関連する世界の一流の数学・物理研究者たちを集めた3ヶ月にわたるアンリ・ポアンカレ研究所トリメスタプロジェクトが採択され、2017年秋(9月から12月)にパリのアンリ・ポアンカレ研究所にて共催することとなっていた。

## 2. 研究の目的

この研究課題は平成29年秋に、研究代表者がリオン第一大学の Aubrun, トゥールーズ第三大学の Nechita, ソルボンヌ大学の Szarek らと共同開催したアンリ・ポアンカレ研究所トリメスタ「Analysis in Quantum Information Theory」に多くの日本人研究者らと参加することを通して、トリメスタに参加している世界最高峰の研究者らと国際共同研究を進め、研究を加速的に発展させる、ことを目的としている。

## 3. 研究の方法

研究代表者はそのトリメスタ期間フランス・パリに約6ヶ月滞在した。そのうち8月から12月にかけて、研究代表者は量子情報理論を中心に研究を行った。特にこのIHPトリメスタに参加した Bardet(リオン第一大学)、Nechita、Aubrun、Christandl(コペンハーゲン大学)、Winter(バルセロナ自治大学)など数多くの参加者と多くの自由確率論と量子情報理論に関する議論を行った。この中で、この国際共同研究加速基金のもとで、日本人共同研究者ら(日合文雄(東北大学)、佐久間紀佳(愛知教育大学)、長谷部高広(北海道大学)ら)が私と一緒にこのアンリ・ポアンカレ研究所トリメスタに参加し、エンタングルメント判定へ自由確率論を応用する研究プロジェクトについて、引き続き議論した。また国際共同研究加速基金を受けて多くの若手日本人研究者も参加した(早瀬友裕(東京大学)、Alexiou(東京大学)、Tsurumi(立命館大学)、Sapra(京都大学)ら)。

研究代表者は日本からの若手研究者と海外の最先端の研究者らの架け橋となり、多くの話題について議論し、実際 Sapra との共著論文を完成させた。国際共同研究加速基金の元で若手研究者がこのアンリ・ポアンカレ研究所トリメスタに参加できた結果、少なくとも3人の若手研究者が論文やプレプリントを完成させた。

## 4. 研究成果

### (1) Michael Brannan との共同研究において

Temperley-Lieb 代数  $TL_k(d)$  の双対基底の係数と自由直交群に対する Weingarten calculus との関係性を調べ、ジョーンズによる未解決問題を解決した。

### (2) Zhi Yin と Zhi Ping Zhong との共同研究

量子情報理論における PPT square 予想と呼ばれるものがある: アリスとチャーリーがエンタングルメント状態を共有すると仮定する。そしてボブとチャーリーもまたエンタングルメント状態を共有しているとする。すると、チャーリーによる測定で条件付けされたアリスとボブの状態は分離可能である。これについて、2つの独立なランダム状態の entanglement swapping で作られるランダム状態は分離可能である、ということを示した。

### (3) Osaka, Hiroyuki; Sapra, Gunjan との共同研究

量子情報理論においてエンタングルメントディテクションで重要となる正值線形写像についての研究を行った。これの構造は未だよくわかっていない部分が多い。

$\rho$ ,  $\sigma$ ,  $n$  の3つのパラメータをもつ equivariance 性がある線形写像  $M_n(\mathbb{C})$   $M_n^2(\mathbb{C})$  の族を提唱し、それについて、正值性、完全正值性、分解性を調べた。それらは  $n \geq 3$  のときに正值性を持つことがわかっており、 $n=3$  のときは 2-正值、完全正值、分解性がパラメータでどう変化するかを調べた。

### (4) 長谷部高広, 佐久間紀佳との共同研究

ランダム行列のサイズ極限において、その規格化トレースについてのモーメントの収束を記述する概念として漸近的自由性がある。その漸近的自由性に加え、その最大固有値が極限分布の台の上限に収束するような場合、強漸近的自由性が成り立つという。GUE のケースや Male と研究代表者が示したようなランダムユニタリ行列のような場合は強漸近的自由性が成り立つことが知られている。他方、有界なランクをもつ行列で摂動を与えるとその強漸近的自由性は崩れ、アウトライヤーと呼ばれる、極限分布の台の上限のそとに最大固有値などが現れる現象が観察される。本研究においてはそのアウトライヤーの挙動を非可換確率論の観点から計算する方法を作り上げた。その中で巡回的単調独立性と言う概念を提案し、ランダム行列とその摂動の組に対して、漸近的巡回的単調独立性を示し、その計算規則を与え、いくつかの具体的なケース

に対して、その極限でのアウトライヤーの位置を示した。

(5) Jonathan Novak と Piotr Śniady との共同研究

GL<sub>N</sub>( $\mathbb{C}$ )の既約表現のテンソル積の isotypic decomposition から現れる離散点過程である Littlewood-Richardson 過程の大域的な量を調べようとした。Biane により Littlewood-Richardson 過程の大域的な量の相関関数は古典的独立な量子ランダム行列である Biane-Perelomov-Popov (BPP)行列とよばれる行列の和の統計量の相関関数と一致することが知られている。古典的独立な BPP 行列が半古典的/サイズ極限で自由に独立していることを示し、Bufetov と Gorin の予想を証明し一般化し、すべての半古典的スケーリングが成り立つ Littlewood-Richardson 過程の BPP 観測量に対して、大数の法則を示した。

(6) 平成30年1月には、研究代表者はパリ高等師範学校の Jean-Philippe Vert を訪れ、ランダム行列、ランダム置換の機械学習への応用について議論した。研究代表者の博士課程の学生もこの共同研究のためにパリを訪問した。研究代表者はその結果をまとめその学生とともに共著論文を執筆中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者は下線)

[雑誌論文](計5件)

1. Brannan, Michael; Collins, Benoît Dual bases in Temperley-Lieb algebras, quantum groups, and a question of Jones. Quantum Topol. 9 (2018), no. 4, 715-748.

<https://doi.org/10.4171/QT/118>

2. Collins, Benoît; Yin, Zhi; Zhong, Ping The PPT square conjecture holds generically for some classes of independent states. J. Phys. A 51 (2018), no. 42, 425301, 19 pp.

<https://doi.org/10.1088/1751-8121/aadd52>

3. Collins, Benoît; Osaka, Hiroyuki; Sapra, Gunjan On a family of linear maps from  $M_n(\mathbb{C})$  to  $M_{n^2}(\mathbb{C})$ . Linear Algebra Appl. 555 (2018), 398-411.

<https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.06.011>

4. Collins, Benoît; Hasebe, Takahiro; Sakuma, Noriyoshi Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices. J. Math. Soc. Japan 70 (2018), no. 3, 1111-1150.

<https://doi.org/10.2969/jmsj/77147714>

5. Collins, Benoît; Novak, Jonathan; Śniady, Piotr Semiclassical asymptotics of  $GL_N(\mathbb{C})$  tensor products and quantum random matrices. Selecta Math. (N.S.) 24 (2018), no. 3, 2571-2623.

<https://doi.org/10.1007/s00029-017-0387-6>

[学会発表](計18件)

1. Benoit Collins, Strong convergence for random permutations, UCLA (IPAM)(招待講演), 2018

2. Benoit Collins, Random permutations and quantum information theory, Oberwolfach(招待講演), 2018

3. Benoit Collins, Strong convergence for random permutations, Ottawa(招待講演), 2018

4. Benoit Collins, The PPT2 square conjecture holds generically, Nagoya(招待講演), 2018

5. Benoit Collins, Random permutations and quantum information theory, Okinawa (OIST)(招待講演), 2018

6. Benoit Collins, Non commutative probability and the Connes embedding problem, University of Oslo(招待講演), 2019

7. Benoit Collins, The PPT2 square conjecture holds generically, Chula University Bangkok(招待講演), 2019

8. Benoit Collins, strong freeness for random tensors, UC Berkeley(招待講演), 2019

9. Benoit Collins, Strong convergence for random permutations, Paris 6, France(招待講演), 2018

10. Benoit Collins, Introduction to Weingarten calculus, CIMPA spring school, Settat, Morocco(招待講演), 2017

11. Benoit Collins, Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices, Park City, PCMI, USA(招待講演), 2017

12. Benoit Collins, MOE estimates for quantum channels arising from random isometries and free probability, IHP, Paris(招待講演), France, 2017

13. Benoit Collins, Strong convergence for random permutations, Orsay, Paris, France(招待講演), 2017

14. Benoit Collins, Asymptotic representation theory, IHP, asymptotic representation theory, 2017

15. Benoit Collins, Free probability and quantum information theory, colloquium, Luxembourg, 2016

16. Benoit Collins, Quantum information theory and free probability, free probability seminar, Universitat Saarelandes, 2016
17. Benoit Collins, Coefficients of the basis elements dual to the Temperley-Lieb basis and Weingarten Calculus, International conference on mathematical physics, AIMR, 2016
18. Benoit Collins, Free probability for quantum computation, Autrans summer school, Escandille, 2016

〔その他〕

ホームページ等

<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~collins/>

## 6. 研究組織

研究協力者

〔主たる渡航先の主たる海外共同研究者〕

研究協力者氏名：イオン・ニキータ

ローマ字氏名：Ion Nechita

所属研究機関名：トゥールーズ第三大学

部局名：数学科

職名：CNRS 研究員

研究協力者氏名：カミール・マレ

ローマ字氏名：Camille Male

所属研究機関名：ボルドー大学

部局名：数学科

職名：CNRS 研究員

研究協力者氏名：バレンティン・フェレイ

ローマ字氏名：Valentin Feray

所属研究機関名：チューリッヒ大学

部局名：数学科

職名：助教

研究協力者氏名：テオドル・バニカ

ローマ字氏名：Teodor Banica

所属研究機関名：セルジー・ポントワーズ大学

部局名：教授

職名：CNRS 研究員

研究協力者氏名：シャーバン・ベリンスキ

ローマ字氏名：Serban Belinschi

所属研究機関名：トゥールーズ第三大学

部局名：数学科

職名：CNRS 研究員

〔その他の研究協力者〕

研究協力者氏名：日合文雄,

ローマ字氏名：Fumio Hiai

所属研究機関名：東北大学

職名：名誉教授

研究協力者氏名：大坂博幸,

ローマ字氏名：Hiroyuki Osaka

所属研究機関名：立命館大学

職名：教授

研究協力者氏名：福田素久，  
ローマ字氏名：Motohisa Fukuda  
所属研究機関名：山形大学

職名：准教授

研究協力者氏名：佐久間紀佳，  
ローマ字氏名：Noriyoshi Sakuma  
所属研究機関名：愛知教育大学

職名：准教授

研究協力者氏名：長谷部高広，  
ローマ字氏名：Takahiro Hasebe  
所属研究機関名：北海道大学

職名：准教授

研究協力者氏名：早瀬友裕，  
ローマ字氏名：Tomohiro Hayase  
所属研究機関名：東京大学

職名：博士課程3年

研究協力者氏名：サプラ グンジャン，  
ローマ字氏名：Sapra Gunjan

所属研究機関名：京都大学

職名：博士課程3年

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。