

令和 2 年 5 月 28 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (特設分野研究)

研究期間：2015～2019

課題番号：15KT0105

研究課題名(和文) トロピカル数学を用いた脳磁図の研究

研究課題名(英文) Tropical geometry and magnetoencephalography

研究代表者

植田 一石 (Ueda, Kazushi)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：60432465

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：脳磁図の信号源推定をしないセンサーレベルのデータに新規の数学的手法を適用することで、脳の様々な状態を判別することを目標として研究を行った。このデータの住む空間は非常に高い次元を持ち、それと比較すると少数の標本しか現実的には得ることが出来ないため、何らかの方法でデータの次元を下げる必要がある。本研究では次元を下げる方法として低次元の空間への線形射影や多次元尺度構成法を取り上げ、代数ビジョンにおける射影再構成問題に対する成果や、球デザインの多体問題的な解釈などを得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数ビジョンは、代数幾何の手法をコンピュータービジョンに応用することを目指す新しい学問である。コンピュータービジョンは、工学、情報学、数学、物理学、医学などに跨る学際的な分野を形成しており、顔認証や自動運転、画像診断などの様々な応用を持つことから、その重要性は明らかである。数学の雑誌で出版された代数ビジョンの論文はまだ少ないが、本研究の成果はその一つである。

研究成果の概要(英文)：Besides several results related to this project, we obtained two results which are specific to this project. One is a purely algebro-geometric treatment of the projective reconstruction problem, which is originally due to Hartley and Schaffalitzky in computer vision. The other is an interpretation of spherical 2-designs as stationary points of a classical mechanical system of particles interacting by a double-well potential. The former is a joint work with Atsushi Ito and Makoto Miura, and the latter is a joint work with Makoto Miura.

研究分野：幾何学

キーワード：代数ビジョン

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ヒトの脳には数百億もの神経細胞(ニューロン)が存在し、それぞれのニューロンが平均数万个のシナプスを有する、極めて複雑なシステムである。脳を理解するためには、大自由度かつ非線形の力学系を記述し、その挙動を明らかにすることができる数学的な手法の開発が必要である。これまでも、神経回路網の数値モデル化や複雑系・カオスなどの観点から研究がなされており、嗅覚や記憶のメカニズムなど理解が進んだ部分もあるが、意識が生じるメカニズムを筆頭に、様々な根源的な問題が手付かずのまま残されている。

脳磁計はニューロンの活動によって生じた磁場を、超電導量子干渉計を用いて体外で測定する装置である。機能的磁気共鳴画像(fMRI)などの他の脳機能イメージング法に比してミリ秒単位の極めて高い時間分解能を有しており、また脳波計測のように脳脊髄液や骨・皮膚組織の存在に影響を受けることがないため、脳活動のダイナミクスを正確に測定する上で最適の手法である。

脳磁図は、環境や脳以外の組織からのノイズの他にも、一見ランダムに見える成分を多く含んでおり、そこからどうやって意味のある情報を取り出すかが大きな課題である。例えば、被験者が起きているか眠っているかや、起きている場合に目を開けているか閉じているかなどは、経験を積んだ実験者が脳磁図を見れば判別できる(興味深いことに、完全な暗闇の中であっても、目を開けている時と閉じている時では脳磁図に明確な差が出る)が、これは人間の認知能力を使った判断であり、これを数学的に定式化するには、大きな騒音の中での音声認識やノイズの多い画像での顔の認識と同種の困難がある。脳機能イメージングの測定結果から特定の認知活動を行っているかどうかを判別するアルゴリズム(デコーダー)については様々な先行研究があるものの、信頼性と一般性を兼ね備えた方法はまだない。

実数に形式的に無限大を付け加えて得られる集合に $x \otimes y := \min\{x, y\}$ および $x \oplus y := x + y$ によって演算を定義して得られる代数(min-plus代数)をトロピカル半環(tropical semiring)と呼ぶ。通常の実数環をトロピカル半環で置き換える操作はトロピカル化と呼ばれ、これによって多項式はminとplusで書かれる区分線形関数に置き換わる。トロピカル化はある種の極限操作であり、量子化の逆の操作であると考えられることが出来る。この観点から、トロピカル化は脱量子化(dequantization)と呼ばれることもある。トロピカル化によって得られた区分線形な対象を扱う数学がトロピカル数学である。トロピカル数学の自然科学への応用については、ダイマー模型と呼ばれる統計力学的な模型がトロピカル数学と密接に関係していることを示した Kenyon-Okounkov-Sheffield, Ann. Math. 163 (2006), 1019-1056 や、Grassmann 多様体のトロピカル化が生物の進化系統樹を記述することを明らかにした Speyer-Sturmfels, Adv. Geom. 4 (2004), 389-411、それにトロピカル幾何を統計モデルのパラメーター推定に応用した Pachter-Sturmfels, PNAS 101 (2004), 16132-16137 などがある。

2. 研究の目的

脳磁計は多数の超伝導量子干渉計を立体的に配置した装置の中に被験者を入れて、ニューロンの活動によって生じた磁場を測定する装置である。ニューロンの活動によって生じる磁場は地磁気の1億分の1程度と非常に小さいので、環境からの磁場によるノイズを極力減らすために、装置全体が磁氣的に遮蔽された部屋に収められている。石井の所属する大阪市立大学の所有する脳磁計は160個の超伝導量子干渉計からなり、被験者はベッドに横になって、脳磁図の測定を行いながら、映像、音声などの刺激により生じる脳磁場活動や様々な課題実行中の脳磁場活動を測定することができる。脳磁図のサンプリング周波数を1kHz、量子化ビット数を8ビットに取ると、生データのサイズは1秒あたり160kBになる。

多量のノイズ(のように見えるデータ)を含む次元の高い時系列データを処理する新規の数学的手法を開発し、これを脳磁図に適用することで脳の様々な状態を判別することが本研究の目的である。

3. 研究の方法

集合 M と可測空間 X があって、 M の各点 p に対して X 上の確率測度が与えられている時、 M は X 上の統計的モデルと呼ばれる。本研究の方法は、与えられた課題をこなしている時の脳の状態を脳磁図の空間の上の確率分布としてモデル化し、そこに情報幾何的な手法を適用することである。統計的モデル M が可微分多様体の構造を持ち、Fisher 情報量がその上の Riemann 計量を与えるときに、 M を統計多様体と呼ぶ。統計多様体を研究する学問が情報幾何である。研究課題名に現れる「トロピカル数学」は、情報幾何においてしばしば自然にアファイン構造が現れ、その上で区分線形性が意味を持つことと、代数統計学とトロピカル幾何学に密接な関係があることから来ている。

4 . 研究成果

名古屋大学多元数理科学研究科の伊藤敦氏及び韓国高等科学院の三浦真人氏と共同で、代数ビジョンにおける射影再構成問題に取り組んだ。

代数ビジョン(algebraic vision)は、代数幾何の手法を用いたコンピュータービジョンの研究に対して与えられた新しい名称である。コンピュータービジョン(computer vision)はデジタル写真や動画から、計算機を用いて情報を取り出すことを研究する学問であり、人間が視覚によって行えるタスクを計算機で実行することを一つの大きな目標にしているが、それにとどまらず、工学、情報学、数学、物理学、医学などに跨る学際的な分野を形成している。

本研究は、脳磁図の信号源推定をしないセンサーレベルのデータに新規の数学的手法を適用することで、脳の様々な状態を判別することを目標としているが、このデータの住む空間は非常に高い次元を持ち、それと比較すると少数の標本しか現実的には得ることが出来ないため、何らかの方法でデータの次元を下げる必要がある。

次元を下げる方法として最も単純なものは低次元の空間への線形射影であるが、十分たくさんの線形射影が与えられた時に、もとのデータが射影変換を除いて復元できるかを問うのが射影再構成問題(projective reconstruction problem)である。3次元から2次元への射影が古典的であるが、一般次元における再構成も、純粋に数学的な興味に加え、動的シーンの解析や歪曲収差の補正などへの応用を持つことが知られている。

一般次元における射影再構成問題に関しては、2009年のHartleyとSchaffalitzkyによる結果が知られているが、我々は射影再構成問題を純代数幾何的に定式化し、HartleyとSchaffalitzkyの結果の全く新しい証明を与えた。

我々による射影再構成問題の定式化は次のようなものである： n と r を自然数とし、 r 個の自然数 m_1, \dots, m_r で、 $m_i < n$ を満たすようなものと、 n 次元射影空間から m_i 次元射影空間への線形射影たち ϕ_i が与えられたとする。直積 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ は射影空間から射影空間の直積への有理写像を与えるが、この像の閉包を多視点多様体(multiview variety)と呼ぶ。多視点多様体から ϕ_i たちが(原理的に避けることのできない n 次元射影空間の自己同型に伴う曖昧性を除いて)復元できるかを問うのが射影再構成問題である。我々は ϕ が一般の場合にこの問題を純代数幾何的な手法で解決した。また、コンピュータービジョンにおいて用いられているGrassmannテンソルが多視点多様体に対するChow形式である(より正確には、古典的なChow形式は、射影空間の部分多様体を双対射影空間の直積の超曲面に変換したものの定義式の係数であるのに対し、Grassmannテンソルは、射影空間の直積の部分多様体である多視点多様体をGrassmann多様体の直積の超曲面に変換したものの定義式の係数である)という観点から、先行研究に対する我々の結果の位置づけを明確にした。

また、三浦真人氏と共同で、多次元尺度構成法(multidimensional scaling)に関する研究を行った。多次元尺度構成法は、与えられた有限距離空間をなるべく良く近似するユークリッド空間の部分空間を探す手法であり、射影による次元削減が線形なのに対し、非線形の次元削減を行う。例えば、これとFloyd-Warshallアルゴリズム(これはトロピカル半環上の行列の冪である)を組み合わせることによって、isomapと呼ばれる多様体学習(manifold learning)の代表的な手法が得られる。古典的な多次元尺度構成法においては距離行列の固有分解が用いられるが、我々は二重井戸型ポテンシャルやLennard-Jonesポテンシャルを用いた損失関数を設定して、それを最小化する一種の多体問題として多次元尺度構成を捉え、いくつかの興味深い現象を観察した。特に、二重井戸型ポテンシャルを用いた非線形の多次元尺度構成法を等距離空間に適応して得られる多体問題が、2球デザインを停留点として持つことを証明した。

自然数 t に対し、 t 球デザインは、球面上の有限個の点の配置で、 t 次以下の多項式の球面全体における積分がそれらの点における値の和で与えられるようなものとして定義される。これは、符号理論に由来するコードと呼ばれる概念の球面上での類似物である球コードと併せて、1977年にDelsarte-Goethals-Seidelによって導入された概念であり、積分の有限和による表現・近似や、それと深く関わる直交多項式や調和多項式との関係を超えて、数学や工学の様々な分野との結びつきを持つ極めて興味深い分野をなし、数多くの研究が行われてきた。我々の結果は2球デザインに多体問題の停留点としての新たな解釈を与える。

また、ポテンシャルとして4次式ではなく、冪指数にパラメーターを持つものを用いて定義される多体問題に対して数値実験を行うことで、2次元の場合に、パラメーターの空間が4つに分割され、パラメーターがそのどれに属するかに応じてポテンシャルの最小点の様子が大きく違う(平面上に分布したり、円周上に均等に分布したり、2球デザインになったり、複数の点が衝突して正三角形の頂点に分布したりする)という予想を定式化した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Ito Atsushi, Miura Makoto, Ueda Kazushi	4. 巻 N/A
2. 論文標題 Projective Reconstruction in Algebraic Vision	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 1~18
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/S0008439519000687	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ishii Akira, Matsuo Takashi, Nakamura Chika, Uji Masato, Yoshikawa Takahiro, Watanabe Yasuyoshi	4. 巻 9
2. 論文標題 Decreased alpha-band oscillatory brain activity prior to movement initiated by perception of fatigue sensation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Scientific Reports	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1038/s41598-019-40605-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Akira Ishii, Masaaki Tanaka, Yasuyoshi Watanabe	4. 巻 6
2. 論文標題 Neural mechanisms to predict subjective level of fatigue in the future: a magnetoencephalography study	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Scientific Reports	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1038/srep25097	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Kazushi Ueda
2. 発表標題 Multidimensional scaling as many-body problems
3. 学会等名 NCTS Symplectic Expedition: Floer Theory and beyond（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/>
<https://github.com/mirror/mds-visualization>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	石井 聡 (Ishii Akira) (90587809)	大阪市立大学・大学院医学研究科・病院講師 (24402)	
研究分担者	小林 健太 (Kobayashi Kenta) (60432902)	一橋大学・大学院経営管理研究科・教授 (12613)	