2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年 　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：３２６６０

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：１６Ｈ０２７８６

研究課題名（和文）大きな待ちを解明する統一的方法とその複雑なネットワークモデルへの応用

研究課題名（英文）Unified approach for studying large queues and its application to complex network models

研究代表者

宮沢　政清（Miyazawa, Masakiyo）

東京理科大学・理工学部情報科学科・教授

研究者番号：８０１１０９４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　6,900,000円

研究成果の概要（和文）：今日サービスシステムの多くはネットワーク型であり通信や流通を始めとして私達の生活や経済活動において広く使われている．これらのシステムにおいては混雑がサービス品質に及ぼす影響が大きい．本研究の目的はこのようなネットワークシステムにおいて大きな混雑が発生するメカニズムを理論的に解明するための方法を確立し，各種の待ち行列ネットワークへ適用することである．本研究では混雑解明のために多次元の待ち行列長の定常分布について裾の漸近特性と重負荷時の拡散近似を調べる．これら２つの漸近特性は従来個別に研究されてきたが本研究では１つ方法で統一的に求める．系内滞在時間分布など関連する量の漸近特性の研究も行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義
（学術的意義）本研究は待ち行列ネットワークを表す確率過程において定常分布の裾の漸近特性や重負荷の下での拡散近似を求める理論的な枠組みをセミマルチンゲールを用いて構築し，新しい形の時間展開式を導き，各種の漸近問題を統一的に解くことができることを示した．これは確率過程の漸近理論に新たな展開を切り開くものである．
（社会的意義）今日サービスネットワークは私達の生活や経済活動に欠かせないが，混雑がサービス品質を劣化させる大きな原因となっている．本研究はこれらのシステムを待ち行列ネットワークにより表し，混雑の発生や影響を明らかにした．これは生活の質の向上や経済活動の円滑化に貢献するものである．

研究成果の概要（英文）：In these days, service systems are of networks, and widely used in our daily life and economic activities, e.g., for communication, physical distribution and production. In those systems, congestions may largely degrade service or performance quality. This study aims to establish a mathematical method to find a mechanism to cause large congestions, and to apply it to various queueing networks such as generalized Jackson networks, multiclass queueing networks with priority service and Markov modulated fluid queueing networks. We here mainly focus on the stationary distributions of multidimensional queue length processes in those network models, and consider their tail asymptotics and diffusion approximations under the heavy traffic conditions. We study these two different type of asymptotic problems by a unfied approach, while they have been separately studied in the literature. We also study some related asymptotic problem for the sojourn time in a network.

研究分野：待ち行列理論

キーワード：待ち行列ネットワーク　セミマルチンゲール　定常分布　漸近特性　拡散近似　流体待ち行列ネットワーク　優先権のあるサービス　状態空間の崩壊

様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１． 研究開始当初の背景

今日サービスシステムの多くはネットワーク型であり私達の生活や経済活動において広く使われている．例えば，ネットワークシステムの例として通信や流通システム，生産システムなどがあげられる．これらのネットワーク型のシステムにおいては混雑がサービスの品質に及ぼす影響が大きく，その解明のための理論としてシステムを確率過程により表し解析する待ち行列ネットワーク理論が研究されてきた．しかし，ネットワーク型のモデルは複雑であり，例外的な場合を除いて直接解析することは困難である．例えば，ネットワークの状態変化は各ノードが空であるかないかにより大きく異なる．このため最近の理論研究は極限的な状況における漸近的な特性に焦点が当てられてきた．代表的な研究に，モデルのパラメータを固定して特性量の漸近特性（例えば，定常分布の裾の減少率）を求める方法と，モデルのパラメータを変化させ確率過程の極限として近似モデルを求め使う方法とがある．後者の代表例は，時間と状態の縮尺を変えた極限を使う近似法である．特に，中心極限定理を確率過程に拡張して得られる多次元ブラウン運動を用いた拡散近似が 40 年以上にわたり広く研究されてきた．これは，拡散近似モデルが到着間隔やサービス時間については平均と分散・共分散だけで記述できるため，応用しやすいためである．しかし，これまでの拡散近似には以下の問題点があった．

(i) 拡散近似の理論的な検証は，各サービス窓口の利用率が１に近づく（重負荷と呼ぶ）という条件の下で，各有限時間区間において尺度変換をした確率過程が拡散過程へ弱収束（分布の意味で収束）することを証明することにより行われてきた．この弱収束による極限を過程極限と呼ぶ．このような過程極限により得られる確率過程の代表例は SRBM (semi-martingale reflecting Brownian motion) と呼ばれる拡散過程であり，近似モデルとして広く使われてきた．しかし，システムの性能評価において重要な尺度変換による定常分布に関する検証は，理論的な難しさのため研究が十分に進んでいなかった.

(ii) 近似の誤差評価ができれば，定常分布がより使いやすくなるが，過程極限を直接求める従来の方法では困難である.

(iii) 拡散近似は、重負荷の場合しか得られていない．どのような拡張が可能であるか十分に検討されていない.

(iv) サービスが多様化し，異なる種類の客が競合してサービスを受けるネットワークモデルが応用上重要性を増してが，モデルが複雑で従来の拡散近似では十分な解明ができなかった.

一方，モデルのパラメータを固定した漸近特性の研究においては，大偏差値理論や行列解析による研究が行われてきた．しかし，以下の問題点がある.

(v) 反射壁がある多次元確率過程の定常分布の漸近特性を求めることは一般に難しく，多くの研究が 2 次元までに限られていた．したがって，ノードが 3 以上の待ち行列ネットワークの漸近特性を求めることは困難であった.

(vi) 従来の研究ではモデルごとに異なる解析方法が適用されてきた．大偏差値理論の場合には関数空間における最適化問題の解として漸近特性を求めることが多く，モデルパラメータの漸近特性への影響を読み取ることが困難である．一方，行列解析では，客の到着分布やサービス時間分布を有限状態のマルコフ連鎖を使って表すため，分布のクラスが限定される．従って，一般的な分布に対する結果を得ることが困難であった．また，結果を行列の固有値問題などを使って表すため，意味は異なるが大偏差値理論の場合と同様にモデルパラメータの漸近特性への影響を読み取ることが難しい.

２．研究の目的

これまで待ち行列ネットワークの漸近特性として，定常分布の裾の漸近特性と重負荷の下での行列ネットワーク過程の拡散尺度変換による過程極限が別々の枠組みの中で研究されてきた．しかし，共に大きな待ち行列が発生する状況下での漸近理論である．この共通点に着目し，上記の問題点を克服するために，以下の 3 項目を本研究の目的とする.

(2a) 大きな待ちを表す成分をもつ確率過程をセミマルチンゲールとして表し，2 つの異なる漸近問題を統一的に解く理論を構築する.

(2b) この理論を各種の待ち行列ネットワークに適用し，定常分布の裾の漸近特性や待ち行列ネットワークの定常分布に関する拡散近似を求め，待ち行列ネットワークにおける大きな待ちが発生するメカニズムとその影響を解明する．このとき，定常分布の裾の漸近特性をモデルパ

ラメータから読み取れる結果を目指す．拡散近似については，定常分布の漸近特性との関係を大偏差値理論における率関数を用いて明らかにする．

(2c) サービス時間分布の裾が指数的より遅く減少する(重い裾と呼ぶ)場合には(2a)の枠組みを拡げる必要がある．このために，マルチンゲールではなく局所マルチンゲールを使うことや異なる角度から大きな待ちの発生を記述する方法について検討する．

３．研究の方法

本研究は確率過程を用いた理論研究であり，可測空間上に各時刻において過去の履歴を集めたσ-集合体の増加列（フィルトレーションと呼ぶ）が定義された確率過程基盤空間（確率空間＋フィルトレーション）上において以下の手順で理論を展開する．

(3a) 待ち行列ネットワークを表す確率過程として区分的に確定的であり微分可能な標本関数をもつ確率過程（Piece-wise deterministic Markov process，略して，PDMP と呼ぶ）を使い，フィルトレーションをこの確率過程から生成する．本研究のマルチンゲールはこのフィルトレーションを使う．

(3b) 本研究では，各時刻で客の到着や退去が起こるまでの時間を補助変数として状態にもつ PDMP を用いた．しかし，PDMP を区分的に分ける時刻(外部からの到着やサービス完了によるノードからの退去が起こる時刻)はランダムであり，その時刻における状態分布を求めることは一般に困難である.そこで，これらの時刻における情報を除去するような指数型のテスト関数(状態から実数への関数)を使って，PDMP の時間展開式を変換する．

(3c) (3b)により変換された時間展開式はセミマルチンゲールであり，その有界変動項が大偏差値理論における率関数を含む関数の積分であることを示す．この確率過程を 2 つの異なる漸近問題に次のように適用する．

(3c1) 上記の(3c)で得られたセミマルチンゲールから指数マルチンゲールを作り，この指数マルチンゲールを相対密度とする測度変換を行う．このとき得られる測度は指数型テスト関数のパラメータに依存して異なる特性を持つ.これらのパラメータを適切に選び，新しい測度の下での漸近特性から定常分布の裾の漸近特性を導く．このとき，この方 法は，各ノードの待ち行列長を要素としてもつ待ち行列ベクトルの次元に依らず適用可能である．

(3c2) 上記の(3c)で得られたセミマルチンゲールの時間と状態の尺度変換を，時間の尺度変換と指数型テスト関数のパラメータの尺度変換を通して行う．定常分布の下でこの尺度変換後の式の期待値を取り，重負荷条件の下で尺度の極限操作を行い極限過程が満たす定常方程式を導く．この方程式から極限過程の定常分布を求める．なお，定常分布は時間に関して不変であるためこの極限操作は時間の尺度変換と独立である.定常分布ではなく，任意の初期分布を与えた下で尺度変換の極限を取れば，極限過程のセミマルチンゲール表現を導くことができる．この場合には時間の尺度変換に依存して極限過程のセミマルチンゲールが異なる．本研究では $r \downarrow 0$ のときの流体尺度変換(状態を r 倍し時間を $1/r$ 倍する)と拡散尺度変換(状態を r 倍し時間を $1/r$ の 2 乗倍する)について検討する．

(3d) サービス時間分布などが重い裾をもつ場合については，セミマルチンゲールの状態変化を停止時刻後は停止する局所型のセミマルチンゲールを使う．また，マルチンゲールを使わずに局所的に起こる大きな変化が確率過程全体に及ぼす影響を取り出すための確率過程についても検討する．

(3e) 上記の(3c1),(3c2),(3d)の結果を用い，待ち行列ネットワークにおける大きな待ちが発生するメカニズムとその影響を解明する．

４．研究成果

項目 2 の研究目的に沿って項目 3 の方法で研究を進めた．主な研究成果は以下の通りである．

(4a) セミマルチンゲールによる漸近解析のための統一的方法として，複数窓口待ち行列，待ち行列ネットワーク，マルコフ変調多次元流体型待ち行列を PDMP(区分的に確定的な標本路をもつマルコフ過程)により記述し，多次元のパラメータをもつ指数型のテスト関数を使って PDMP の時間展開式のセミマルチンゲール表現を導いた(発表論文④，⑦，学会発表①，③，⑥，⑦，⑧，⑨など)．このとき，大偏差値理論の率関数がこの表現式に含まれることを確認した．一般的には，反射壁をもつ多次元確率過程に対して広くこの方法を適用できることを確かめた(学会発表⑤)．

(4b) この統一的方法を複数窓口待ち行列に適用し，定常分布の裾の漸近特性を導くと共に，重負荷条件の下で尺度変換を行い定常分布が反射壁をもつ拡散過程(Semimartingale reflecting Brownian motion, 略して SRBM と呼ぶ)の定常分布へ収束することを証明した(発表論文⑦).更にこの結果を客に種類のないネットワークへ拡張した(発表論文⑥). 現在，同じ方法をマルコフ変調多次元流体待ち行列ネットワークへ適用した研究の論文を執筆中である(学会発表④，⑥).

(4c) (4a)の統一的方法を異なる種類の客を優先順位順にサービスする待ち行列ネットワークへ適用し，重負荷条件の下で定常分布が(4b)で説明した SRBM の定常分布になることを証明した (学会発表 1). この結果を A.Braverman, J.G.Dai との共著論文として執筆中である. この研究では,極限において優先度の高い客の待ち行列が無視できるほどに小さくなる(これを状態の崩壊と呼ぶ). この現象の確認のために流体尺度変換による極限過程を用いる. この部分には C.Cao,J.G.Dai による執筆中の論文の結果を用いた.

(4d) (4b)と(4c)の研究から，(4a)の統一的方法におけるセミマルチンゲールによる時間展開式において，指数型テスト関数のパラメータの尺度変換比 r に関して，1 次の係数が流体近似を，2 次の係数が拡散近似を表すことが分かった. これより，流体近似は一般的に得られるが，拡散近似を得るためには，r の 1 次の項が無視できるための条件が必要であり，重負荷条件がこれに相当することが分かった. 更に，従来の拡散近似では必ずしも明確でなかった大偏差値理論の率関数と拡散近似の関係が明らかになった. これを今後拡散近似の精密化や誤差評価を行う上で役立てたいと考えている.

(4e) (4a)の統一的方法を待ち行列ネットワークの定常分布の裾の漸近特性を得るためには，(3d)で述べた指数型マルチンゲールによる測度変換を行う. 指数部分のパラメータを適切に選ぶと，この変換後の確率測度上では待ち行列ネットワークの一部のノードにおける待ち行列が発散する.一般に発散する待ち行列の漸近特性は比較的簡単に得ることができる.この結果を用いて元の確率測度上での定常分布の裾の漸近特性を求めた. この特性は多次元空間の幾何的図形から求めることができる. この図形は複数の凸集合から得られる図形であり，各凸集合の解析表現を求めることはできるが，漸近特性を表す点を求めることは必ずしも容易ではない. 本研究では数値的に求める方法も使って，各種の待ち行列ネットワークに対して大きな混雑が発生する要因やその影響を説明することができた(発表論文④，学会発表⑦).

(4f) これまで述べてきた方法とは別の方法で待ち行列の漸近特性に取り組む研究を(3d)で述べた方法により進めた.この方法では１つの大きなサービス時間が全体に大きな影響を与える. 混雑を量る基準として客がネットワークに到着してから退去するまでの滞在時間分布について裾の漸近特性を求めることが課題である.一般的なネットワークでは難しいので，ポアソン過程に従う到着があり待ち行列は１つであるが，サービス完了後に一定の確率で再度待ち行列に加わるフィードバック型待ち行列について滞在時間分布の漸近特性を求めた(発表論文③).

(4g) 以上の研究を補助する 3 件の関連研究を行った. 発表論文⑤では他種類の客をもつ循環サービスネットワークの定常状態における関係式導いた. 発表論文③では(4f)で用いた方法を分岐過程の漸近特性問題に適用した. 発表論文①では(3b)の方法を使って再生理論を一般の計数過程に拡張する研究を行った.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計７件）

① D.J. Daley and M. Miyazawa, A martingale view of Blackwell's renewal theorem and its extensions to a general counting process, Journal of Applied Probability, 査読有, 56, No. 2, 2019, 印刷中.
arXive: https://arxiv.org/abs/1712.06278

② S. Foss and M. Miyazawa, Tails in a fixed-point problem for a branching process with state-independent immigration, Markov Processes and Related Fields, 査読有, 2019 (予定), 印刷中.
arXive: https://arxiv.org/abs/1808.09209

③ S. Foss and M. Miyazawa, Customer sojourn time in GI/G/1 feedback queue in the presence of heavy tails, the Journal of Statistical Physics, 査読有, 173, 2018, 1195-1226.
DOI:10.1007/s10955-018-2079-9 (open access).

④ M. Miyazawa, Martingale approach for tail asymptotic problems in the generalized Jackson network, Probability and Mathematical Statistics, 査読有, 37, 2017, 395-430.
DOI: 10.19195/0208-4147.37.2.11 (open access)

⑤ M. Boon, O. Boxma, O. Kella and M. Miyazawa, Queue-length balance equations in multiclass multiserver queues and their generalizations, Queueing Systems, 査読有, 86, 2017, 277-299.
DOI: 10.1007/s11134-017-9528-z (open access)

⑥ A. Braverman, J.G. Dai and M. Miyazawa, Heavy traffic approximation for the stationary distribution of a generalized Jackson network: the BAR approach, Stochastic Systems, 査読有, 7, 2017, 143-196.
DOI: 10.1214/16-AAP1211 (open access)

⑦ M. Miyazawa, A unified approach for large queue asymptotics in a heterogeneous multiserver queue, Advances in Applied Probability, 査読有, 49, 2017, 182-220.
DOI: 10.1017/apr.2016.84

〔学会発表〕（計 15 件，うち招待講演 12 件）

① M. Miyazawa, Steady-state heavy traffic limits for multiclass queueing networks with SBP service policies, INFORMS applied probability conference, 招待講演 (国際学会), Brisbane (Australia), 2019, July 3 (発表予定).

② M. Miyazawa, A martingale view of Blackwell's renewal theorem and its extensions to a general counting process, Modern Applied Probability. A workshop in celebration of Sergey Foss' 65th birthday, 招待講演 (国際学会), ICMS, The Bayes Center, Edinburgh (UK), 2019, May 16.
https://www.icms.org.uk/sergey65.php

③ M. Miyazawa, Martingale approach for large queue, International Conference on Advances in Applied Probability and Stochastic Processes, 招待講演 (国際学会), CMS College, Kottayam (India), 2019, January 6.

④ 宮沢政清, 待ち行列モデルの漸近解析:標本路方程式の活用, 日本 OR 学会待ち行列研究部会·合同研究発表会, 招待講演, 東京工業大学, 2018 年 10 月13日

⑤ M. Miyazawa, An alternative approach for diffusion approximation of queueing networks in heavy traffic, A Symposium on Optimal Stopping in Memory of Larry Shepp, 招待講演 (国際学会), Rice University, Houston (USA), 2018, June 27.

⑥ M. Miyazawa, Markov modulated fluid network process: Tail asymptotics of the stationary distribution, Stochastic Model VI, Banach center, 招待講演 (国際学会), Bedlewo (Poland), 2018, June 7.

⑦ M. Miyazawa, Martingale approach for tail asymptotic problems in the generalized Jackson network, Heriot-Watt University, Mathematical and computer sciences, 招待講演, Edinburgh (UK), 2017, October 4.

⑧ M. Miyazawa, Martingale approach for tail asymptotic problems in the generalized Jackson network, INFORMS applied probability conference (国際学会), Chicago (USA), 2017, July 9.

⑨ 宮沢政清, マルチンゲールと待ち行列ネットワークの漸近解析, 日本OR学会待ち行列研究部会, 招待講演, 東京工業大学, 2017 年 4 月 15 日.

⑩ M. Miyazawa, Martingale approach for tail asymptotic problems in the generalized Jackson network, Stochastic Networks And Risk Analysis V, Banach center, 招待講演 (国際学会), Bedlewo (Poland), 2016, September 15.

⑪ M. Miyazawa, How parallel queues are balanced for a join shortest queue and dedicated arrivals in heavy traffic, VI-th internal conference on Modern Problems in Theoretical and Applied Probability, 招待講演 (国際学会), The Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk (Russia), 2016, August 23.

⑫ M. Miyazawa, Comparison of FBFS and LBFS disciplines for a two station four class network with static buffer priority, European Conference on Queueing Theory 2016 (国際学会), Toulouse (France), July 18.

⑬ M. Miyazawa, Martingale decomposition for large queue asymptotics, The Ninth International Conference on Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models (国際学会), Budapest (Hungary), 2016, June 28.

⑭ 宮沢政清, 混雑する世界から見た待ち行列, 招待講演, 日本 OR 学会事務局, 2016 年 4 月 19 日.

⑮ 宮沢政清, 優先サービスを行う待ち行列ネットワークの重負荷近似と状態空間の崩壊, 日本 OR 学会待ち行列研究部会, 招待講演, 東京工業大学, 2016 年 4 月 16 日.

〔図書〕（計 1 件）

① 宮沢政清, 対話・確率過程入門, 現代数学社, 219 ページ, 2019 年 2 月 20 日

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等
https://www.rs.tus.ac.jp/miyazawa/index.html

６．研究組織

(1)研究分担者:なし

(2)連携研究者

氏名:佐久間大(SKUMA,Yutaka),
所属・職:防衛大学・情報工学科・講師
研究者番号:00434027

氏名:小林正弘(KOBAYASHI, Masahiro)
所属・職:東海大学・理学部情報数理学科・准教授
研究者番号:90609356

(3) 海外研究協力者:

Jim G. Dai (Cornell University, Professor),
Sergey Foss (Heriot-Watt University, Professor),
Jose Blanchet (Stanford University, Associate professor)
Tomasz Rolski (The University of Wroclaw, Professor emeritus)
Bert Zwart (Centrum Wiskunde & Informatica, Professor),