

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16H03919

研究課題名(和文) 保型形式の周期，合同およびL関数の特殊値に関する総合的研究

研究課題名(英文) Periods, congruence and special values of L functions for modular forms

研究代表者

桂田 英典 (KATSURADA, Hidenori)

北海道大学・理学研究院・研究院研究員

研究者番号：80133792

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,200,000円

研究成果の概要(和文)：(1) Hermitian Ikeda liftに関する池田の予想のadelic versionを証明した。(2) 本研究の主目的の一つであるKim-Yamauchi liftに関する周期関係についてはその予想を立てそれを証明した(山内卓也, Henry H. Kimとの共同研究)。(3) 局所体F上の2次形式のGross-Keating invariantの基礎理論を構築し, これを利用して2次形式のSiegel級数の明示的公式を求めることに成功した(池田保との共同研究)。(4) Harder予想を再定式化し, ある場合に証明した(跡部堯, 千田雅隆, 伊吹山知義, 山内卓也との共同研究)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1) ユニタリー群やE7型例外群の保型形式に関して重要な興味深い結果を与えるとともに, 例外型Jordan代数の局所理論に新たな知見を加えた。(2) 局所体の2次形式の理論をdyadic, non-dyadicに限らず統一的に扱えるようになった。また, Siegel級数の明示的な公式はDuke-Imamoglu-Ikeda liftのフーリエ係数の評価やShimura多様体のサイクルの交差数に関するKudla programにも使われ, 今後も大域的な応用が見込まれる。(3) Harder予想の新しい定式化はBergstroem-Farber-van-der-Geer予想等にも新たな知見を与える。

研究成果の概要(英文)：1. We proved an adelic version of Ikeda's conjecture on the period of the Hermitian Ikeda lift. 2. We proposed a conjecture on the period of the Kim-Yamauchi lift, and proved it (joint work with H. H. Kim and T. Yamauchi). 3. We constructed a fundamental theory of quadratic forms over non-archimedean local fields, and gave an explicit formula for the Siegel series of a quadratic form (joint work with T. Ikeda). 4. We reformulated Harder's conjecture, and proved it for some cases (joint work with H. Atobe, M. Chida, T. Ibukiyama and T. Yamauchi).

研究分野：整数論

キーワード：Hermitian Ikeda lift Kim-Yamauchi lift period relation Gross-Keating invariant Siegel series Harder conjecture

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

#### 1. 研究開始当初の背景

本研究代表者は Duke-Imamoglu-Ikeda lift に関する池田保によって予想された周期関係式を証明した(河村尚明との共同研究)。また、これを用いて Duke-Imamoglu-Ikeda lift とそうでない Hecke 固有形式との合同を与える素イデアルの特徴づけを行った。また、これらを行うために必要な 2 次形式の局所理論、特に 2 次形式に付随する Siegel 級数の明示公式を求めていた。このようなことを Ikeda type と呼ばれる他の群上の保型形式への lift (Hermitian Ikeda lift, Kim-Yamauchi-lift, Yamana lift, Ikeda-Yamana lift) で考えることは興味深く意義のあるものであることが明確になりつつあった。また、Neal Dummigan の考察により、上に述べた合同と Harder 予想が関連が明確になってきた。

#### 2. 研究の目的

1 に述べた lift の周期関係式を予想しそれを証明することを究極の目的としながら、それに関連する 2 次形式、Hermite 形式の局所理論を整備することを目的としていた。特に一般の非アルキメデス体上の 2 次形式、Hermite 形式の Gross-Keating invariant の理論を構築しそれをして Siegel 級の明示公式を求めることを目的としていた。また、1 に述べた合同を用いて Harder 予想に手掛りを与えることも目的の 1 つであった。

#### 3. 研究の方法

(1) 内外の研究者との討論。研究テーマの深化を目的として国内外訪問と国内外の研究者の招聘を行い共同研究者と討論を行うとともに多くの知見を得た。2020-2022 はコロナのため対面での交流は制限されていたが、E-メールおよびオンラインにより研究交流を行った。また、研究発表を行った。

(2) 数式処理ソフトの利用。様々な予想を立てるための数値実験を行う際に数式処理ソフト Mathematica を利用した。また、数値例を計算したり実際の数式の証明にもこれを利用した。

#### 4. 研究成果

(1) 2015 年度までに Hermitian Ikeda lift の Rankin-Selberg 級数の明示公式を求めそれを利用して周期関係に関する池田の予想を解決したが、新たにその adelic version も証明した。これに伴い Hermite 形式の局所理論を整備した。

(2) Kim-Yamauchi lift に付随する Rankin-Selberg 級数の明示公式を予想し、それを証明した。これにより、Kim-Yamauchi lift の周期関係式を得た。このために例外型 Jordan 代数の局所理論を整備し、F4 型代数群に関する mass formula を証明した (Henry H. Kim, 山内卓也との共同研究)。また、この手法を応用して Kim-Yamauchi lift に付随する twisted Koecher-Maass 級数の明示公式を求めた (Kim との共同研究)。

(3) 一般の非アルキメデス局所体  $F$  上の 2 次形式の Gross-Keating invariant の理論を構築した。特に、Gross-Keating invariant を精密化した 'EGK datum' を定義し、これを用いて Siegel 級数の明示公式を求めた。この明示公式は  $F$  が  $p$ -進体のときには本研究代表者が 1999 年に求めているがそれは複雑で  $p$  が 2 のときとそうでない時の形が統一されていなかった。また、どのような不変量で Siegel 級数が決定されるかも明確ではなかった。今回の結果はその一般化で

あるとともにこのような難点をすべて解決したほぼ究極の結果といえる。さらに、この明示公式を用いて Duke-Imamoglu-Ikeda lift のフーリエ係数の良い評価を得た。一般の非アルキメデス局所体  $F$  上の Hermite 形式に対しても Gross-Keating invariant を定義し、上と同様な理論を構築した(以上、池田保との共同研究)。また、2 進体の不分岐拡大上の 2 次形式の Gross-Keating invariant および EGK datum を具体的に求めるアルゴリズムを開発した (Sungmun Cho, 池田保, Chul-hee Lee, 山内卓也との共同研究)。また、2 次形式の局所理論の応用として、ある  $p$  進 Siegel 保型形式が真の Siegel 保型形式になることを示した (長岡昇勇との共同研究)。

(4) Harder 予想に対しては当初の計画とは全く異なるアプローチで大きな進展があった。Harder 予想は重さが  $2k+j$  の 1 変数正規 Hecke 固有形式(原始形式)  $f$  の Fourier 係数がある次数  $2$  の重さが  $(k+j, k)$  の Hecke 固有形式の Hecke 固有値とある素イデアルを法として関係することを主張する。これはそれ自体興味深いものであり、Selmer 群についての Bloch-Kato 予想の解決にも大きな役割を果たす。Harder 予想は同じ空間の 2 つ Hecke 固有形式の合同についての予想ではなく、このことがその証明を困難にしている理由の 1 つである。本研究においてはこの予想を 2 つの Hecke 固有形式の合同として再定式化した。また、それを用いて  $k$  が偶数で  $j$  が 4 で割り切れるときの本来の予想を解くことを解くことができた。これを解く際に Arthur の重複度公式を利用して新たなリフトの存在を証明するとともに、ベクトル値 Siegel 保形式の合同理論を構築した。さらに、ガロア表現の合同・非合同と Bloch-Kato の Selmer 群の可除性についても新たな知見を加えた(跡部発, 千田雅隆, 伊吹山知義, 山内卓也との共同研究)。

(5) 様々な Ikeda type lift の Rankin-Selberg 級数の subconvexity について研究した。Hermitian Ikeda lift, Kim-Yamauchi lift についてはそれぞれ(1), (2)の結果を利用したが, Duke-Imamoglu-Ikeda lift については新たに Rankin-Selberg 級数の明示公式を求めた。(Henry H. Kim との共同研究)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 14件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 H. Katsurada and S. Nagaoka	4. 巻 -
2. 論文標題 On p adic Siegel Eisenstein series	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Cho, T. Ikeda, H. Katsurada, C. H. Lee and T. Yamauchi	4. 巻 -
2. 論文標題 An inductive formula for the Gross-Keating invariant of a quadratic form	5. 発行年 2025年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Ikeda and H. Katsurada	4. 巻 783
2. 論文標題 An explicit formula for the Siegel series of a quadratic form over a non-archimedean local field,	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. reine. angew. Math.	6. 最初と最後の頁 1-47
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2021-0061	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 H. Katsurada, H. H. Kim and T. Yamauchi	4. 巻 302
2. 論文標題 Period of the Ikeda type lift for the exceptional group of type E(7,3)	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Math. Z.	6. 最初と最後の頁 559--588
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-022-03057-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Katsurada	4. 巻 70
2. 論文標題 Boundedness of denominators of special values of the L-functions for modular forms	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Comment. Math. St. Pauli.	6. 最初と最後の頁 29-48
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Katsurada and H. H. Kim	4. 巻 248
2. 論文標題 Twisted Koecher-Maass series of the Ikeda type lift for the exceptional group of type E(7,3)	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Number Theory	6. 最初と最後の頁 140-171
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2023.01.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Atobe, M. Chida, T. Ibukiyama, H. Katsurada and T. Yamauchi	4. 巻 -
2. 論文標題 Harder's conjecture I	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Ikeda and H. Katsurada,	4. 巻 -
2. 論文標題 Estimates of the Fourier coefficients of Duke-Imamoglu-Ikeda lift	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Forum Math	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2022-0197	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Cho (with an appendix by T. Ikeda, H. Katsurada)	4. 巻 296
2. 論文標題 On the local densities and the Gross-Keating invariant	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Math. Zeit.	6. 最初と最後の頁 1235-1269
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-020-02457-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Katsurada	4. 巻 57
2. 論文標題 Congruence for the Klingen-Eisenstein series and Harder's conjecture	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Report of Oberwolfach Workshop 'Modular forms'	6. 最初と最後の頁 55-57
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Ikeda and H. Katsurada	4. 巻 140
2. 論文標題 On the Gross-Keating invariant of a quadratic form over a non-archimedean local field	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1521-1565
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1353/ajm.2018.0046	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 J. Bergstrom, N. Dummigan, T. Megarbane, T. Ibukiyama an H. Katsurada	4. 巻 27
2. 論文標題 Eisenstein Congruences for $SO(4, 3)$ , $SO(4, 4)$ , Spinor, and Triple Product L-values	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Experimental Math.	6. 最初と最後の頁 230-250
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10586458.2016.1251861	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Ikeda and H. Katsurada	4. 巻 2100
2. 論文標題 On the Gross Keating invariant of a Hermitian form over a non-archimedean local field	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 141 - 150
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Katsurada	4. 巻 286
2. 論文標題 On the period of the Ikeda lift for $U(m,m)$	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Math. Zeit.	6. 最初と最後の頁 141,178
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-016-1758-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Katsurada,	4. 巻 88
2. 論文標題 Period of the adelic Ikeda lift for $U(m,m)$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Abh. Math. Semin. Univ. Hambg	6. 最初と最後の頁 67,86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12188-017-0178-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 池田保, 桂田英典	4. 巻 1777
2. 論文標題 Explicit formula for the Siegel series of a quadratic form over a non-archimedean local field	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 183,195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Katsurada and S. Takemori	4. 巻 25
2. 論文標題 Congruence primes of the Kim-Ramakrishnan-Shahidi lift	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Experiment. Math.	6. 最初と最後の頁 332-346
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10586458.2015.1070777	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計10件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 桂田英典
2. 発表標題 Estimates for Fourier coefficients of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift
3. 学会等名 9th Kyoto conference on automorphic forms, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hidenori Katsurada
2. 発表標題 Explicit formulas for the Rankin-Selberg series of the Ikeda type lifts and their application to the quantum unique ergodicity
3. 学会等名 23rd Autumn Workshop on Number Theory (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hidenori Katsurada
2. 発表標題 Congruence between certain lifts and Harder's conjecture
3. 学会等名 保型形式と数論 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年



1. 発表者名 Hidenori Katsurada
2. 発表標題 Congruence for the Klingen-Eisenstein lift and Harder's conjecture
3. 学会等名 22-th Hakuba Autumn Workshop (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hidenori Katsurada
2. 発表標題 Congruence for the Klingen-Eisenstein series and Harder's conjecture
3. 学会等名 Oberwolfach Workshop 'Modular forms' (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H. Katsurada
2. 発表標題 Pullback of Eisenstein series and its applications (1),(2) ,
3. 学会等名 The 20th Hakuba Workshop (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 H. Katsurada
2. 発表標題 Explicit formula for Siegel series
3. 学会等名 Number Theory Down Under (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 池田保、桂田英典
2. 発表標題 On the Gross-Keating invariant for Hermitian forms,
3. 学会等名 RIMS 共同研究(公開型) 保型形式の解析的・数論的研究
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 桂田英典
2. 発表標題 An explicit formula for the Siegel series
3. 学会等名 東北大学代数学セミナー(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Katsurada
2. 発表標題 Period and congruence of automorphic form,
3. 学会等名 Number Theory Down Under(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	伊吹山 知義  (IBUKIYAMA Tomoyoshi)  (60011722)	大阪大学・理学研究科・名誉教授    (14401)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	池田 保  (IKEDA Tamotsu)  (20211716)	京都大学・理学研究科・教授    (14301)	
連携研究者	山内 卓也  (YAMAUCHI Takuya)  (90432707)	東北大学・理学研究科・准教授    (11301)	
連携研究者	千田 雅隆  (CHIDA Masataka)  (00451518)	東京電機大学・未来科学部・准教授    (32657)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関