

令和 4 年 5 月 15 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16H03929

研究課題名(和文) 標準束の複素幾何学；多様体の変形族と退化の研究

研究課題名(英文) Complex geometry of the canonical bundle; Study of deformations and degenerations of complex manifolds.

研究代表者

高山 茂晴 (Takayama, Shigeharu)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：20284333

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,200,000円

研究成果の概要(和文)：退化も許すコンパクト代数多様体の族 $f : X \dashrightarrow Y$ に対し、退化した中心ファイバー X_0 の性質、一般ファイバー X_y の性質、および底空間 Y の f に付随した性質、この三者を関連付ける研究成果を得た。また $f : X \dashrightarrow Y$ に対しファイバー積分により得られる Y 上の関数を詳しく研究した。特に $\dim Y > 1$ の場合には技術的に難しい点があり40年近く進展がなかったが、困難を克服し、その関数の特異点の周りでの漸近展開公式を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

$f : X \dashrightarrow Y$ の中心ファイバー X_0 は考え方によっては無限遠に位置するファイバーと見做せる。これを有限部分に存在する一般ファイバー X_y の情報から理解できる方法を与える、という考え方は数学以外においても有用である。ファイバー積分により得られる底空間上の関数の研究は、積分の族を用いるような現象を扱う場面においてしばしば現れ、応用範囲が広い。漸近展開公式の発散項の特定、記述はその初めに問題となるような点であり基本的である。

研究成果の概要(英文)： Let $f : X \dashrightarrow Y$ be a family of compact algebraic manifolds, which can be singular along the central fiber X_0 . We obtained various results which connect properties of X_0 , properties of general fibers X_y , and properties of Y associated with f . We also studied in details functions on Y which come from fiber integrals along the fibers of $f : X \dashrightarrow Y$. We proved a formula of the asymptotic expansion of such functions on Y . There is no development for about 40 years in the case $\dim Y > 1$, because of technical difficulties.

研究分野：複素幾何学

キーワード：複素幾何学 相対標準束 変形空間 モジュライ空間 ファイバー積分 漸近挙動

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

モジュライ空間は幾何構造の変形理論として様々な設定で論じられている。極小モデル理論の発展を受けて、Kollar (アメリカ)らは一般型代数多様体のモジュライ空間の良いコンパクト化を構成した。藤野は $f_*(K_{X/Y}^m)$ の正值性を調べることで、そのコンパクト化が射影的であることを示した。Paun-高山は $K_{X/Y}^m$ に双対 m 次 Bergman 計量 B_m^* , $f_*(K_{X/Y}^m)$ に m 次 Narasimhan-Simha 計量 g_{mNS} と呼ばれる標準計量を構成し、そしてその曲率の正值性を示し、この方面からのモジュライ理論の複素解析的研究に道を開いた。一方、偏極多様体の幾何学的不変式論の意味での安定性と定スカラー曲率 Kahler 計量の存在問題に関する研究は、Kahler 多様体の収束・崩壊の理論など周辺の多分野を巻き込み当時大きく発展中であった。取り分け Donaldson らのグループ、Tian らのグループによる研究は良く知られていた。他方、正則関数の(大沢-竹腰の) L^2 拡張理論は最良評価付きのものが大沢、Blocki, Guan-Zhou, Berndtsson-Lempert らにより確立され、吹田予想の解決など、多変数のみならず関数論全般に新展開がもたらされた。

2. 研究の目的

リーマン面のモジュライ空間の理論は、代数、幾何、解析が交わり非常に豊かで興味深い対象であり、よく研究されている。これを理想として、高次元複素多様体のモジュライ空間の複素幾何学的な側面からの理論の構築を目指す。退化も許す複素多様体の族 $f : X \rightarrow Y$, $\{X_y = f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$, に対し、その相対標準束 $K_{X/Y}$ は f の多くの基本的な情報を持つ。その各巾 $K_{X/Y}^m$, さらに順像層 $f_*(K_{X/Y}^m)$ に適切な意味の標準計量が入る。その標準計量およびその曲率形式の性質は、リーマン面のモジュライ理論の類推から非常に基本的かつ重要である。これを近年目覚しく発展している諸理論、代数多様体の極小モデル理論、Donaldson-Sun, Tian らの理論、正則関数の L^2 拡張理論を総合して研究を行う。

3. 研究の方法

(1) 本研究は代数幾何、複素幾何、多変数複素解析等の多岐の分野にわたる視点を必要とするため、広範囲の他の研究者グループと活発な議論、最新情報の交換等を行う必要があった。連携研究者とはメール等により情報交換し、主に国内で行われる研究集会などの際に研究打ち合わせを行った。海外の研究者とは、2017年3月に2週間程度シカゴに滞在し、M. Paun氏(当時:アメリカ、イリノイ大学)とV. Tosatti氏(アメリカ、ノースウエスタン大学)と多重標準束、カラビ・ヤウ多様体の退化に関する共同研究を行った。また2019年7月にはM. Paun氏(ドイツ、パイロイト大学)を2週間程東京に招き、順像層の正值性と大沢-竹腰 L^2 拡張定理の応用について議論した。

(2) 幾つかの研究集会を主催し、国際的な研究交流などを促進した。

ワークショップ「Complex Geometry 2019 Tokyo」於 東京大学、2019年7月。Paun, Dano Kim, Mario Chan らを招聘し、 L^2 拡張定理、Fano 多様体の K 安定性などについて議論した。

「複素幾何シンポジウム」於 金沢大学関連施設。2016年~2020年の11月上旬に主に後藤氏(阪大理)と共催した。2020年はオンライン開催であった。

「多変数複素解析葉山シンポジウム」於 湘南国際村センター、神奈川県葉山町、2017年~2019年7月下旬。主に平地氏(東大数理)らと共催した。

4. 研究成果

以下では一般に X, Y を複素多様体とし、 $f : X \rightarrow Y$ をその間の全射固有平坦な正則写像とする。

(1) $f : X \rightarrow Y$ に対し、ファイバー積分により得られる Y 上の関数、またはそれに類するものは様々な場面において現れ、その研究は応用上不可欠である。特に深く関係する先行研究として Barlet 氏による $\dim Y = 1$ の場合のものがある(1982年)。この研究の高次元化、 $\dim Y > 1$, は様々な技術的な困難があり、長い間為されてこなかったが、射がトーリックである場合に理論を完成させた。代数幾何学の枠組みでは射はトロイダルな場合に還元できるため、応用上の不都合はあまりない。相対次元を $n = \dim X - \dim Y$ とし、 v を X 上の (n, n) 形式とする。このとき v を f のファイバー X_y 上で積分し、 $y \in Y$ を動かすと Y 上の関数 f_*v が得られる。0 in Y 上で f が特異点をもつとき、 f_*v は 0 in Y で不連続になりうる。 $\dim Y = 1$ とし t を 0 中心の局所座標とすれば、 f_*v は

$$a_{\{kk' rj\}}(v) t^k s^{k'} |t|^{2r} (\log |t|)^j$$

の無限和の形に漸近展開される (s は t の複素共役)。ここで $a_{\{kk' rj\}}(v)$ は定数で X_0 上の台にもつかレントである。 k, k' はゼロ以上の整数を動く。また特異性と関係する巾 r は f によって定まる有限個の有理数のみを、巾 j は $0, 1, \dots, n$ のみを値として取りうる。 $\dim Y > 1$ のときも同様な漸近展開公式が得られる。この研究成果は論文として J. reine angew. Math. (2021) に発表した。

(2) $f : X \rightarrow Y$ の一般ファイバー X_y の標準束が豊富であるような滑らかな代数多様体の退化・変形を研究した。 Y は1次元円板とし、原点上以外では f は滑らかとする。 X_y はリッチ曲率が負のケーラー・アインシュタイン計量 g_y を許容する。このときに以下の二つの性質は同値であることを示した。ケーラー・アインシュタイン計量に関する多様体の直径の一様な評価、原点上のファイバー X_0 が高々対数的末端特異点しか持たない。この研究成果は論文として Publ. RIMS(2019)に発表した。

(3) $f : X \rightarrow Y$ の滑らかな一般ファイバー X_y はカラビ・ヤウとする。ここでは X_y の標準束は自明とする。各 X_y にはリッチ曲率がゼロのケーラー・アインシュタイン計量 g_y が入る。 X_0 の特異点が穏やかであるための微分幾何的な特徴付けを与えた。 X_y が特異ファイバー X_0 に近づいたときの直径 $\text{diam}(X_y, g_y)$ の振る舞いに注目する。次の二つが同値であることを示した。(a) f を弱半安定還元と良い相対極小モデルで置き換えることで、 X_0 は高々標準特異点しか持たない。(b) $y \rightarrow 0$ のとき直径が一様有界であること: $\text{diam}(X_y, g_y) < C$ (C は y に依らない定数)。 $\text{Dim } Y = 1$ のときは2015年に発表した論文で示していた。ここでも Donaldson-Sun (Acta Math.2014) が重要な役割を果たしている。他の鍵となる結果として、 X_0 が標準特異点しかもたないとき、 $f_*K_{X/Y}$ の標準 L^2 計量が 0 in Y において連続であることを示した。この研究成果は論文として J. Math. Sci. Univ. Tokyo (2019) に発表した。

(4) $f : X \rightarrow Y$ に対して、ある点 0 in Y のファイバー X_0 の退化の様子を調べたい。 f の双有理モデルの取り換えにより、 X_0 の特異性が穏やかであるようにできるのはどのような状況かを判定する充填問題の研究を行った。得られた結果は次の通りである。 f は弱半安定であり、良い極小モデルを持つものとする。中心ファイバーの既約分解を $X_0 = \bigcup_{i \in I} F_i$ とし、一般ファイバーを X_y とする。多重種数の等式 $\sum_{i \in I} P_m(F_i) = P_m(X_y)$ が十分多くの $m > 0$ に対して成立するとする。このとき f の良い極小モデル $f' : X' \rightarrow Y$ に対し、中心ファイバー X'_0 は正規であり高々標準特異点しか持たない。特に $P_m(X'_0) = P_m(X_y)$ がすべての $m > 0$ に対して成立する。応用として、中心ファイバーが高々標準特異点しかもたないようなモデルの存在と、底空間上のある種の Weil-Petersson 型擬計量が 0 の周りで非完備であることが同値であることを示した。これは2003年に提出された C.-L. Wang 氏の予想の肯定的な解決を与えるものである。この研究成果は論文として Algebraic Geom. (2019)に発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Takayama Shigeharu	4. 巻 773
2. 論文標題 Asymptotic expansions of fiber integrals over higher-dimensional bases	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 67 ~ 128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2020-0027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shigeharu Takayama	4. 巻 55
2. 論文標題 Moderate Degeneration of Kahler-Einstein Manifolds with Negative Ricci Curvature	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 779 ~ 793
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/55-4-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shigeharu Takayama	4. 巻 26
2. 論文標題 Moderate degenerations of Ricci-flat Kahler-Einstein manifolds over higher dimensional bases	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Sci. Univ. Tokyo	6. 最初と最後の頁 335 ~ 359
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shigeharu Takayama	4. 巻 6
2. 論文標題 A filling-in problem and moderate degenerations of minimal algebraic varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic Geom.	6. 最初と最後の頁 26--49
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14231/AG-2019-002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mihai Paun, Shigeharu Takayama	4. 巻 27
2. 論文標題 Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Algebraic Geom.	6. 最初と最後の頁 211--272
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jag/702	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Gordon Heier and Shigeharu Takayama	4. 巻 74
2. 論文標題 Effective degree bounds for generalized Gauss map images	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Math., Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 203--236
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 高山 茂晴
2. 発表標題 Asymptotic expansions of fiber integrals and applications
3. 学会等名 第15回代数・解析・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年~2020年

1. 発表者名 Shigeharu Takayama
2. 発表標題 Asymptotic expansions of fiber integrals and application
3. 学会等名 Birational geometry and moduli spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shigeharu Takayama
2. 発表標題 Asymptotic expansions of fiber integrals
3. 学会等名 Tianyuan International Workshop in Several Complex Variables (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高山 茂晴
2. 発表標題 Degeneration of Kahler-Einstein manifolds
3. 学会等名 2018 International conference on complex geometry and several complex variables (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高山茂晴
2. 発表標題 ファイバー空間の相対標準束と充填問題
3. 学会等名 代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高山茂晴
2. 発表標題 Moderate degeneration of Kähler-Einstein manifolds with negative Ricci curvature
3. 学会等名 第23回複素幾何シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高山茂晴
2. 発表標題 Moderate degeneration of Kähler-Einstein manifolds
3. 学会等名 Mini-workshop on Complex Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高山 茂晴
2. 発表標題 Moderate degenerations of Calabi-Yau manifolds over higher dimensional bases
3. 学会等名 Analytic Methods in Algebraic Geometry Day (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高山 茂晴
2. 発表標題 Positivity of the direct image of an adjoint bundle with multiplier ideal
3. 学会等名 第22回複素幾何シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 高山 茂晴
2. 発表標題 標準束の複素幾何学
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会 幾何学・トポロジー分科会合同 特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

ホームページ等 <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/takayama.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	二木 昭人 (FUTAKI Akito) (90143247)	東京大学・大学院数理科学研究科・教授 (12601)	
連携研究者	後藤 竜司 (Goto Ryushi) (30252571)	大阪大学・大学院理学研究科・教授 (14401)	
連携研究者	大沢 健夫 (Ohsawa Takeo) (30115802)	名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授 (13901)	
連携研究者	宮地 秀樹 (Miyachi Hideki) (40385480)	大阪大学・大学院理学研究科・准教授 (14401)	
連携研究者	藤野 修 (Fujino Osamu) (60324711)	京都大学・大学院理学研究科・准教授 (14301)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携 研究者	尾高 悠志	京都大学・大学院理学研究科・准教授	
	(Odaka Yuji) (30700356)	 (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計10件

国際研究集会 第26回複素幾何シンポジウム	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 第25回複素幾何シンポジウム	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Complex Geometry 2019 Tokyo	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 第21回多変数複素解析葉山シンポジウム	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 第20回多変数複素解析葉山シンポジウム	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 第24回複素幾何シンポジウム	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 第19回多変数複素解析葉山シンポジウム	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 第23回複素幾何シンポジウム	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 第22回複素幾何シンポジウム	開催年 2016年～2016年
国際研究集会 第18回多変数複素解析葉山シンポジウム	開催年 2016年～2016年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	イリノイ大学	ノースウエスタン大学	
ドイツ	バイロイト大学		