

令和元年5月27日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16H03936

研究課題名(和文)L-類, コボルディズム理論と双変理論およびその周辺に関する位相幾何学的総合研究

研究課題名(英文)General studies on L-class, cobordism theory, bivariant theory and related topics

研究代表者

與倉 昭治 (Yokura, Shoji)

鹿児島大学・理工学域理学系・教授

研究者番号：60182680

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,900,000円

研究成果の概要(和文)：Levine-Morelの代数的コボルディズム理論をSスキームの場合に拡張した. 双変代数的コボルディズム理論の完成を目指していたが, Toni Annala氏(British Columbia大)が2018年11月に完成させた. 今はAnnala氏と共同で束の代数的コボルディズム理論を研究している. 双変L-類を模索中, Hirzebruch χ - y 種数がファイバー束についてmod 4で乗法的であることを発見した. この予想外の発見を切掛に, χ - y 種数のmod 8乗法性やモチヴィック特性類のホモロジー的合同式等を得た. また, 双変理論の発想から写像のホモトピー集合についても興味ある成果等を得た.

研究成果の学術的意義や社会的意義

我々が目指していた双変代数的コボルディズム理論はToni Annala氏が最新の分野である導来代数幾何の理論と代表者與倉の先行結果を用いて完成したが, 我々の先行研究および目指す結果が最新の研究分野と繋がったという意味で学術的意義がある. L-類の研究中発見したHirzebruch χ - y 種数のmod 4乗法性が, 良く知られた指数のmod 4乗法性の拡張であることは評価に値する. 当初予定になかった, 写像のホモトピー集合を双変理論の視点で考察した結果が, フィールズ賞受賞者であるA. Connes等の最新の研究と関連しているという指摘を査読者から受けた事から, 我々の研究成果は評価に値すると考えたい.

研究成果の概要(英文)：We extended Levine-Morel's algebraic cobordism to S-schemes. While we were aiming to complete a bivariant algebraic cobordism, Toni Annala (University of British Columbia) completed it in November 2018. Now we are working together with Toni Annala on a bivariant algebraic cobordism of vector bundles.

While we were looking for a bivariant L-class, we noticed that Hirzebruch χ - y genus is multiplicative for a fiber bundle. With this unexpected discovery as a starting point, we obtained the multiplicativity mod 8 of χ - y genus and homological congruence formulae of the motivic characteristic class and so on. Based on the idea of bivariant theory, we also obtained interesting results on the homotopy set of mappings and so on.

研究分野：トポロジー

キーワード：motivic Hirzebruch 類 Hirzebruch χ - y 種数 双変理論 代数的コボルディズム ファイブレーション

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 代表者與倉は海外共同研究者J.-P.Brasselet 氏(仏, CNRS) とJ.Schuermann氏(独, Muenster 大)との共同研究で、複素代数多様体の相対Grothendieck群 $K_0(V/X)$ から $Q[y]$ 係数ホモロジー群 $H_*(X; Q[y])$ への自然変換 $T_y: K_0(V/-) \rightarrow H_*(-; Q[y])$ で X が非特異多様体の場合に $T_y(\text{id}: X \rightarrow X)$ がHirzebruch特性類 $T_y(X)$ のPoincare双対となることを満たすものが唯一つ存在することを齋藤盛彦氏のMixed Hodge Modules の理論を用いて証明した。我々の研究成果はPeters-Steenbrink著のMixed Hodge Structures (Springer, 2008) にも引用されている。また, Mixed Hodge Modules 理論の創始者齋藤盛彦氏自身も申請者達の研究成果に関する研究を始めた。

我々の自然変換 $T_y: K_0(V/-) \rightarrow H_*(-; Q[y])$ は1973年にMacPhersonによって提起されたunification問題に対する肯定的な解答として以下の3つの重要な特異多様体の特性ホモロジー類の理論(GRR型定理)を統一するものである。

(Chern 類) MacPherson's Chern class (Ann. of Math. 100 (1974), 423-432)

(Todd 類) Baum-Fulton-MacPherson's Riemann-Roch (Publ. Math. I. H. E. S.45(1975), 101-145)

(L-類) Cappell-Shaneson's L-class (J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 521-551)

(2) Fulton-MacPherson は著書「Categorical frameworks for the study of singular spaces」(Memoirs AMS. 1981) で, (Todd 類)Baum-Fulton-MacPherson's Riemann-Roch の双変理論版を構成し, (Chern 類)MacPherson's Chern class の双変理論版の存在を予想した。この予想は海外共同研究者J.-P. Brasselet 氏によって肯定的に解決された。Cappell-Shaneson's L-class の双変理論版の存在は未だに予想すらされていないが, 代表者は海外共同研究者Schuermann 氏との共同研究で, T_y^* の双変理論版 BT_y^* の構成に成功した。

2. 研究の目的

多様体など非特異空間ではコホモロジー群等の反変関手が本質的役割を果たす。しかし, 特異点を持ちうる代数多様体, 解析多様体, 滑層空間など, 広い意味での「特異空間」の諸不変量はある種の共変関手からホモロジー論への自然変換として, 或はその自然変換による特別な量の像として捉えられている。本研究は共変関手及び反変関手を統一するFulton-MacPhersonのBivariant Theory (双変理論)を中心に置き, Atiyahのbordism理論やLevine-Morelのalgebraic cobordism理論の双変理論版の構築と双変理論におけるGrothendieck-Riemann-Roch (GRR)型定理や圏論化, およびそれらに関連する話題に関する位相幾何学的総合研究を行う。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者の先行研究であるOriented bivariant theory I (International J. of Mathematics, 2009)をさらに発展させて双変algebraic cobordism理論および双変L-類を考察する。

(2) 研究代表者等のモチヴィック特性類はパラメーター y が $-1, 0, 1$ の時はそれぞれよく知られたChern類, Todd類, L-類に相当するが, 任意 y の場合(よく質問される問題)を考察する。

(3) 研究代表者および研究分担者は, 海外で開催される, 本研究に関連する研究集会に積極的に出席し, 研究発表を行うとともに, 参加者達との直接の研究連絡を行い情報収集に努める。

(4) 研究分担者, 海外共同研究者等を招聘, あるいは関連する研究を行っている研究者の所属する大学あるいは研究所を訪問するなど, メールだけの通信ではできない密な研究討論を行い, 研究の更なる促進・進展に努める。

(5) 2006年2月に「数学の異分野が交流する場」として, 分担者である木村俊一氏, 竹内潔氏と3人で始めた「代数・解析・幾何学セミナー」は好評で全国的に認知度も高く, 以来毎年開催している。この研究集会に本研究と関連する研究を行っている研究者に講演等を依頼する。

4. 研究成果

研究代表者の研究成果のみについて記載する。

(1) 我々の自然変換 $T_y^*: K_0(V/-) \rightarrow H_*(-; Q[y])$ は $y=-1, y=0, y=1$ の時は, それぞれChern類, Todd類, L-類に対応するものであるが, これらを用いて $T_y^*(X)$ の具体的な公式を与えた。これは, よく聞かれる質問「 y が $-1, 0, 1$ 以外のときはどうなるのか?」に対する一つの解答である。

(2) 上記の研究成果をヒントに, 代数的ファイバー束の場合の公式を整理する中で, 「Hirzebruch χ - y 種数がファイバー束に対してmod 4で乗法的であること」が公式の中に隠されていることを発見した。これはHambelton-Korzeniewski-Ranickiの定理「ファイバー束の指数はmod 4で乗法的である」(Geometry & Topology, 11 (2007), 251-314)のHirzebruch χ - y 種数への拡張になっている。何故なら, $y=1$ の時Hirzebruch χ - y 種数は指数(signature)であるから。この意外な発見は, 当初予定していなかった研究(以下の(3), (4))へと更に発展した。

(3) 上記(2)の研究成果を切掛にC.Rovi女史(米国Indiana大学)との共同研究により, y が奇数の時にはHirzebruch χ - y 種数がファイバー束に対してmod 8で乗法的であることを証明した。

(4) 更に, 上記(2), (3)の研究成果はLaurentiu Maxim氏(米国Wisconsin大学)との共同研究により, 自然変換 $T_y^*: K_0(V/-) \rightarrow H_*(-; Q[y])$ に対する合同公式として拡張することができた。

- (5) 研究代表者の上記論文「Oriented bivariant theory, I」の続編としての論文「Oriented bivariant theory, II---algebraic cobordism of S-schemes」で S-schemes の algebraic cobordism 理論を構成した.
- (6) algebraic cobordism 理論の双変理論版の構成を模索している中, Toni Annala 氏 (British Columbia 大学, カナダ) が導来代数幾何の理論を用いた Lowrey-Schuerger の derived algebraic cobordism (J. Insti. Math. Jussieu, 15 (2016) 407-443) を, 代表者の上記論文「Oriented bivariant theory, I」における構成方法を用いて, bivariant derived algebraic cobordism に拡張した論文(arXiv, July 13, 2018, 修正版: November 25, 2018)を発表した. その後, Annala 氏と共同研究をすることとなり, 現在 Lee-Pandharipande の Algebraic cobordism of bundles on varieties (J. Eur. Math. Soc., 14(2010), 1081-1101)の双変理論版の研究を行なっている.
- (7) 当初予定していなかったが, 双変理論的発想を切掛けに, 山口俊博氏 (高知大学) との討論後共同研究で, 写像のホモトピー集合 $[X, Y]$ が poset-stratified space の構造をもつ事等を証明した. この研究成果は1950年代の Borsuk や Thom の研究と深く関連していることが分かった. また, 我々の結果は A. Connes-C. Consani の最近の論文 "Homological algebra in characteristic one" (Higher Structures, 3 (2019), 155-247) の研究と関連するとの指摘を査読者から受けたことを付け加える.
- (8) 上記成果(7)をより一般的な枠組みで捉えるため, 代表者 與倉 は論文「Decomposition spaces and poset-stratified spaces」 (現在投稿中) を書いた.
- (9) 同じく双変理論的発想を切掛けに山口俊博氏との共同研究で, 有理ホモトピー理論で良く知られた Hilali 予想を, 同予想を特別な場合として含むような「写像に対する予想」の論文を書いた.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 32 件)

1. [S. Yokura](#), Oriented bivariant theory, II --Algebraic cobordism of S-schemes--, International J. Math., 査読有, 32 ページ, 2019, 印刷中, DOI: 10.1142/S0129167X19500319
2. L. Maxim and [S. Yokura](#), Homological congruence formulae for characteristic classes of singular varieties, European J. of Math., 査読有, 26 ページ, 2019, 印刷中, DOI: 10.1007/s40879-018-0305-2
3. T. Yamaguchi and [S. Yokura](#), A poset structure induced from homotopy classes of maps and a classification of fibrations, Commu. Korean Math. Soc., 査読有, 2019, 印刷中, DOI: 10.4134/CKMS.c180326
4. T. Yamaguchi and [S. Yokura](#), Poset-stratified space structures of homotopy sets, Homology, Homotopy and Applications, 21 (2019), 1-22, 査読有, DOI: 10.4310/HHA.2019.v21.n2.a1
5. [O. Saeki](#), Elimination of definite fold II, Kyushu J. Math., (2019), 印刷中, 査読有, <https://arxiv.org/pdf/1709.03804.pdf> (https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~kjm/to_appear.html)
6. [K. Takeuchi](#), Bifurcation values of polynomial functions and perverse sheaves, Annales de l'Institut Fourier, (2019), 印刷中, 査読有, <https://arxiv.org/abs/1401.0762>
7. [S. Yokura](#), On decomposition spaces, Alexandroff spaces and related topics, Kyoto University RIMS Kokyuroku, 2064 (2018), 5-26, 査読無, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/kokyuroku.html>
8. T. Yamaguchi and [S. Yokura](#), On a relative Hilali conjecture, African Diaspora Journal of Mathematics, 21(2018), 81-86, 査読有, <https://projecteuclid.org/euclid.adjm>
9. [S. Yokura](#), Hirzebruch chi-y-genera of complex algebraic fiber bundles--- the multiplicativity of the signature modulo 4 --, "Schubert Varieties, Equivariant Cohomology and Characteristic Classes: IMPANGA 15", EMS Series of Congress Reports(2018), 315-330, 査読有, DOI: 10.4171/182-1/13
10. R.I. Baykur and [O. Saeki](#), Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of 4-manifolds, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 115 (2018), 10894-10900, 査読有, DOI : 10.1073/pnas.1717175115
11. [O. Saeki](#) and T. Yamamoto, Singular fibers of stable maps of manifold pairs and their applications, "Singularities and Foliations. Geometry, Topology and Applications", Araujo dos Santos, et al (Eds.), Springer Proc. in Math. & Statistics, 222 (2018), 259-294, 査読有, DOI:10.1007/978-3-319-73639-6
12. A. Esterov and [K. Takeuchi](#), On vanishing theorems for local systems associated to Laurent polynomials, Nagoya Math. Journal, 231 (2018), 1-22, 査読有, DOI: 10.1017/nmj.2017.8

13. Y. Ike, Y. Matsui and K. Takeuchi, Hyperbolic localization and Lefschetz fixed point formulas for higher-dimensional fixed point sets, *Int. Math. Res. Not.*, 2018 (2018), 4852-4898, 査読有, DOI: 10.1093/imrn/rnx030,
14. S. Yokura, “Counting” spaces and related topics, *Topology and its Applications* 225 (2017), 206-219, 査読有, DOI: 10.1016/j.topol.2016.03.036
15. S. Cappell, L. Maxim, J. Schürmann, J. Shaneson and S. Yokura, Characteristic classes of symmetric products of complex quasi-projective varieties, *J. für Reine und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 728 (2017), 35-63, 査読有, DOI: 10.1515/crelle-2014-0114
16. O. Saeki, A Vassiliev type invariant of order one for stable maps of 3-manifolds into surfaces, *Kyoto University RIMS Kokyuroku*, 2049 (2017), 155-172, 査読無, <https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/237060/1/2049-14.pdf>
17. J.-P.Brasselet, J. Schürmann and S. Yokura, Motivic and derived motivic Hirzebruch classes, *Homology, Homotopy and Applications*, Vol. 18(2) (2016), 283-301, 査読有, DOI: 10.4310/HHA.2016.v18.n2.a16
18. C. Rovi and S. Yokura, Hirzebruch chi-y-genera modulo 8 of fiber bundles for odd integers y, *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 12 (2016), 587-602, 査読有, DOI: 10.4310/PAMQ.2016.v12.n4.a7
19. T. Yamaguchi and S. Yokura, Fiber-homotopy self-equivalences and a classification of fibrations in rational homotopy, *Journal of Homotopy and Related Structures*, Vol.11(2016), 957–972, 査読有, DOI: 10.1007/s40062-016-0152-0
20. 與倉昭治, 論説「モチヴィック特性類の話題から」, 日本数学会「数学」, 第 68 巻 2 号 (春季号) (2016), 151-176, 査読有, DOI: 10.11429/sugaku.0682151
21. H. Moriyoshi, The Calabi invariant and central extensions of diffeomorphism groups, *Geometry and Topology of Manifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 154 (2016), 283-297, 査読有, DOI:10.1007/978-4-431-56021-0_15
22. A. Gorokhovskiy, H. Moriyoshi and P. Piazza, A note on the higher Atiyah-Patodi-Singer index theorem on Galois coverings, *J. Noncommut. Geom.*, 10 (2016), 265-306, 査読有, DOI :10.4171/JNCG/234
23. O. Saeki and T. Yamamoto, Singular fibers of stable maps of 3-manifolds with boundary into surfaces and their applications, *Algebraic & Geometric Topology*, 16 (2016), 1379-1402, 査読有, DOI: 10.2140/agt.2016.16.1379
24. O. Saeki and T. Yamamoto, Cobordism group of Morse functions on surfaces with boundary, *Contemporary Mathematics*, 65 (2016), 279-297, 査読有, DOI: 10.1090/conm/675
25. K. Takeuchi and M. Tibar, Monodromies at infinity of non-tame polynomials, *Bull. Soc. Math. France*, 144 (2016), 477-506, 査読有, DOI : 10.24033/bsmf.2720

〔学会発表〕 (計 55 件)

1. S. Yokura, On bicycles, The 14th Algebra-Analysis-Geometry Seminar (at Kagoshima University), 2019 年
2. H. Moriyoshi, An index theorem on binary tube and the bounded Euler cocycle, AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting (University of Hawaii at Manoa, Honolulu, HI, USA), 2019 年
3. O. Saeki, Unlinking singular locus from regular fibers and its application to submersions, The 14th Algebra-Analysis-Geometry Seminar (at Kagoshima University) , 2019 年
4. K. Takeuchi, On irregularities of Fourier transforms of regular holonomic D-module, The 14th Algebra-Analysis-Geometry Seminar (at Kagoshima University), 2019 年

5. S. Yokura, Motivic Hirzebruch classes of singular varieties and some homological congruence formulae, MPS Conference on Singularities: Geometric, Topological, and Analytic Aspects, August 13-17, 2018, Simons Foundation's Gerald D. Fischbach Auditorium in New York City, 2018年
6. S. Yokura, Congruence formulae for Hirzebruch chi-y genera and motivic Hirzebruch classes of singular varieties, June 12, 2018, "Special Session on Singularities in Geometry, Topology, and Algebra", the Joint International Meeting of the Chinese Mathematical Society and the American Mathematical Society (June 11th to 14th, 2018), Fudan University of Shanghai, 2018年
7. H. Moriyoshi, Fuzzy sphere and the Ginsparg-Wilson index, Noncommutative Geometry and Representation Theory (Tianyuan Mathematical Center, Chengdu, China), 2018年
8. H. Moriyoshi, Combinatorial Gauss-Bonnet theorem and the Alexander-Spanier cohomology, GAP (geometry, algebra, analysis and mathematical physics) Seminar (University of Science and Technology of China (Hefei, China), 2018年
9. O. Saeki, Unlinking singular locus from regular fibers and its application to submersions, Geometry, Topology and Dynamics Seminar (Okinawa Institute of Science and Technology, Okinawa, Japan), 2018年
10. O. Saeki, Simplifying indefinite fibrations and trisections of 4-manifolds, The 13th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar (Kagoshima University), 2018年
11. K. Takeuchi, On irregularities of Fourier transforms of regular holonomic D-modules, Workshop "Riemann-Hilbert correspondences" (Padova University, Italy), 2018年
12. 與倉昭治、東京大学大学院数理科学研究科, 集中講義, モチビックHirzebruch特性類について、(2017年10月10日-10月13日), 2017年
13. 與倉昭治、Poset-stratified spaces and some applications」東京大学大学院数理科学研究科トポロジー火曜セミナー, 2017年
14. S. Yokura, On decomposition spaces, Alexandroff spaces and related topics, RIMS 研究集会「集合論的・幾何学的トポロジーの動向と諸分野との連携」, 2017年
15. S. Yokura, On poset-stratified spaces and related topics, Singularity Theory Conference (East China Normal University, Shanghai), 2017年
16. 森吉仁志, Calabi 不変量と微分同相群の中心拡大, 葉層構造の幾何学とその応用 (京都教育大 藤森キャンパス), 2017年
17. O. Saeki, Indefinite fibrations on differentiable 4-manifolds, Brazil-Mexico 3rd Meeting on Singularities (UNAM, Unidad Cuernavaca, Cuernavaca, Mexico), 2017年
18. O. Saeki, A Vassiliev type invariant of order one for stable maps of 3-manifolds into surfaces, PRIMA 3rd Congress, Singularities of Spaces and Mappings (Oaxaca, Mexico), 2017年
19. K. Takeuchi, On the monodromies and the limit mixed Hodge structures of families of algebraic varieties, Singularity Theory Conference (East China Normal University, Shanghai), 2017年
20. K. Takeuchi, On the monodromy conjecture for non-degenerate hypersurfaces, 3rd PRIMA congress in Oaxaca (Oaxaca, Mexico), 2017年
21. S. Yokura, Hirzebruch chi-y -genera and signatures of singular varieties, Focus Program on Topology, Stratified Spaces and Particle Physics, Fields Institute, University of Toronto, Canada, 2016年
22. S. Yokura, Hirzebruch chi-y-genera and signatures of algebraic varieties, Toric Topology 2016 in Kagoshima, 2016年

23. S.-i. Kimura, Rationality of Motivic Chow Series modulo infinitesimal A^1 -homotopy, The first congress of Algebra Geometry of Mexico, Oaxaca (Mexico), 2016年
24. H. Moriyoshi, On symplectic embeddings of Kodaira-Thurston manifold, Workshop on Development of new methods in Symplectic Geometry: JSPS Bilateral Joint Research Project between Belgium and Japan, Tokyo Electron House of Creativity, Tohoku University(宮城県, 仙台市), 2016年
25. H. Moriyoshi, A Bordism extension and the Callias index theorem, Conference on Geometry, Representation Theory and the Baum-Connes Conjecture (Toronto, Canada), 2016年
26. 佐伯 修, Stable maps on 3-manifolds and signatures of 4-manifolds with boundary, 研究集会「4次元トポロジー」, 大阪市立大学理学部 (大阪府, 大阪市), 2016年
27. O. Saeki, Indefinite fibrations on 4-manifolds, Differential Geometry, Lie Theory and Low Dimensional Topology, Melbourne (Australia), 2016年
28. K. Takeuchi, On the monodromies and the limit mixed Hodge structures of families of algebraic varieties, Iberian Meeting on Algebraic Analysis, Lisbon (Portugal), 2016年

[図書] (計 5 件)

1. 竹内 潔, 久保隆徹, 「数学リテラシー」, 共立出版, 2018年, 208 ページ
2. 竹内 潔, 「D 加群」, 共立出版, 2017年, 328 ページ,
3. B. Anderssen, P. Broadbridge, Y. Fukumoto, N. Kamiyama, Y. Mizoguchi, K. Polthier, and O. Saeki, “The Role and Importance of Mathematics in Innovation”, Proceedings of the Forum “Math-for-Industry” 2015, Springer, 2017, 188
4. 松谷 茂樹, 佐伯 修, 中川 淳一, 田上 大助, 上坂 正晃, P. Cesana, 濱田 裕康, 「結晶の界面、転位、構造の数理」, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2017, 148
5. R. N. Araujo dos Santos, V. H. J. Perez, O. Saeki and T. Nishimura (editors), “School on Real and Complex Singularities in Sao Carlos, 2012”, Advanced Studies in Pure Mathematics, Kinokuniya, 2016年, 373 ページ

6. 研究組織

(1) 研究分担者

- ① 木村 俊一 (Kimura, shun-ichi)
 広島大学
 大学院理学研究科
 教授
 研究者番号 : 10284150
- ② 森吉 仁志 (Moriyoshi, hitoshi)
 名古屋大学
 大学院多元数理科学研究科
 教授
 研究者番号 : 00239708
- ③ 佐伯 修 (Saeki, osamu)
 九州大学
 マス・フォア・インダストリ研究所
 教授
 研究者番号 : 30201510
- ④ 竹内 潔 (Takeuchi, kiyoshi)
 筑波大学
 大学院数理物質系
 教授
 研究者番号 : 70281160