

科学研究費助成事業（基盤研究（S））公表用資料  
〔平成31年度（2019年度）研究進捗評価用〕

平成28年度採択分  
平成31年3月18日現在

多重ゼータの深化と新展開  
Multiple Zeta Values and Functions

課題番号：16H06336

金子 昌信 (KANEKO, MASANOBU)

九州大学・大学院数理学研究院・教授



研究の概要（4行以内）

多重ゼータ値のなす代数や個々の関係式について、様々の異なる由来から予想、証明されてきた構造や等式について、予想はその証明に迫ると共にそれらの相互関連を明らかにし、背後に存在するであろう統一理論を確立する。また、多重ゼータ関数の解析数論的および  $p$  進解析的な理論を整備、多重ゼータ値の理解深化にも供しながら新しい現象を発見し、将来を展望する。

研究分野：代数学

キーワード：数論、数論幾何学、低次元トポロジー

1. 研究開始当初の背景

多重ゼータ値間には多くの関係式が存在することが知られており、最初のブレークスルーである「大野関係式」をはじめ、「正規化複シャッフル関係式」、「アソシエータ関係式」など、内外の多くの結果がある。しかしながら、様々な由来を持つ関係式間の相互関係の理解や、予想次元にまで落とすための必要十分は関係式族は何かという問題はまだ途上である。また、多重ゼータ関数の数論的な理解は緒に就いたばかりである。

2. 研究の目的

数論、代数幾何、トポロジー、場の量子論など様々の異なる由来から予想、証明されてきた多重ゼータ値の構造、等式について、その相互関連を明らかにし、背後に存在するであろう統一理論を確立すること、また、多重ゼータ値を特殊値として包摂する多重ゼータ関数の解析数論的、および  $p$  進解析的な理論を整備し、上記の異なる由来固有の事実の理解深化に役立てつつ、次代を潤すような新しい現象を発見し、将来を展望すること。

3. 研究の方法

代表者、分担者、連携研究者が研究目的に沿った役割分担の下、個人研究を基本としながらも相互連携も保ちつつ、研究を推進する。各種のセミナー、研究会の機会を利用し、お互いの研究の進展の報告や共同研究を行う。また国内外の関連研究者や研究協力者を招聘し、議論や情報交換を通じて新しい視点も取り入れつつ、研究を推進する。

4. これまでの成果

多重ゼータ値の新たな関係式族として、「積分級数関係式」、「合流関係式」が発見・証明された。両者ともに、多重ゼータ値の全線形関係式を導くであろうと予想される広いクラスであり、前者は既によく知られている「正規化複シャッフル関係式」との等価性が併せて示された。後者は正規化複シャッフル関係式を導くこと、更に、現在最強の関係式族として知られる「アソシエータ関係式」族と等価であるということが示された。積分級数関係式も合流関係式もともに、ごく初等的に証明できる点が特筆され、関係式族の統一的な理解に向け新たな視点が得られたと言える。複シャッフル関係式についても、付随するリー環の新たな解釈や、「準シャッフル関係式」という一般化の新しい解釈などが得られている。最も基本的な関係式である「双対性」については、積分表示を使わない証明が初めて与えられた。これは広範な適用例を持つ優れた方法で、たとえば同じアイデアで大野の関係式が証明される。ここでも従来の結果を統一的に理解する手法が得られたと言える。

有限多重ゼータ値については、さまざまな一般化（高い素数べきを考える、その極限をとるなど）および、古典的な関係式の類似物が続々と研究され、明らかにされている。一例として、Aoki-Ohno の関係式、Le-Murakami の関係式として古典的な場合に知られる関係式の有限多重ゼータ値類似の証明、ある種

のグラフに付随した有限多重ゼータの研究や有限ポリログの研究などがある。また「有限多重ゼータ値」と「対称多重ゼータ値」を結びつける「基本予想」に一つの根拠を与えるような注目すべき対象 ( $q$ -級数) が導入され、二つが関係づけられた。更にこの  $q$ -級数の精密化を、「変数付き反復積分」の手法を用いて与えることにより、有限多重ゼータ値、対称多重ゼータ値が満たすシャッフル関係式の極めて自然な証明が与えられ、その理解が大きく進んだ。

「特異点解消多重ゼータ関数」については、解析数論的、 $p$  進解析的な研究の基礎が据えられ、負整数点での値について、従来からの「繰り込み値」を統一的に解釈するような道を拓いた。これらの  $L$  関数への一般化などが活発に推進されている。また、いわゆる荒川-金子のゼータ関数というものの「レベル 2」類似と、その特殊値に現れる、新たなレベル 2 多重ゼータ値が導入され、その基本性質が調べられた。**Hoffman** が最近研究している別種のレベル 2 多重ゼータ値と対をなすものと考えられ、重要な新しいクラスと思われるが、こちらについては、たとえば次元の予想値など、これまでになような様相を呈しており、新たな現象を示唆する。「補完多重ゼータ値」に付随する荒川-金子型ゼータ関数への拡張も別方向の一般化として興味深い成果が得られている。更には、荒川-金子ゼータ関数の負整数点での値に表れる「多重ベルヌーイ数」の拡張、その組合せの解釈についても、**Gnocchi** 数との関係など、一定の成果が得られている。

また、モチビク多重ゼータ値を用いた **Broadhurst-Kreimer** 予想へのアプローチについても、ある微分次数環の  $K\pi_1$  性やあるエタールコホモロジーに関する予想などの予想に帰着させるという著しい結果が得られている。多重ゼータ値とモジュラー形式との関係に関しては、従来広く知られていた **Gangl-Kaneko-Zagier** の結果のある種の精密化を与える成果も得られた。

ほかにも、数論トポロジーの観点からの伊原理論 (多重ゼータ値の「ガロア側」の理論と言える) の研究、「高さ 1」多重ゼータ値の母関数をガンマ関数で書き表す青本-ドリンフェルトの公式のガロア対応物と見られる、**Coleman-Ihara** の公式のポリログ拡張についての研究、結び目や三次元多様体の様々なタイプの量子不変量の研究、配置空間やそこでの  $KZ$  接続などについての研究、新しいタイプの結合子である **Alekseev-Torossian** アソシエータという対象の係数の計算とその多重ゼータ値との関係の研究など、多様な側面から多重ゼータ値、多重ゼータ関数の理解に迫ろうとする多数の研究成果が得られている。

## 5. 今後の計画

これまでに得られた様々な結果の相互関係の理解を推進していくとともに、新たな現象の発見に努め、研究目的の達成を図る。より具体的には例えば、新しく導入された幾つかの手法により、多重ゼータ値のなす代数の構造、**Broadhurst-Kreimer** 予想、有限多重ゼータ値の基本予想、 $p$  進多重ゼータ関数などについての理解を促進する。今後も引き続き、九州大学の多重ゼータ研究センターを中心として、各地でのセミナーや研究会などでの議論、共同研究などを通しそれぞれの研究目的の達成を図る。

## 6. これまでの発表論文等 (受賞等も含む)

S. Seki, S. Yamamoto, A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations, *International Journal of Number Theory*, 1-5, (2019).

H. Hirano, M. Morishita, Arithmetic topology in Ihara theory II, Milnor invariants, dilogarithmic Heisenberg coverings and triple power residue symbols, *Journal of Number Theory*, 198, 211-238, (2019).

M. Kaneko, K. Oyama, S. Saito, Analogues of the Aoki-Ohno and Le-Murakami relations for finite multiple zeta values, to appear in *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Published online, 1-7, (2018).

K. Matsumoto, Y. Umegaki, On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power  $L$ -functions, *Intern. J. Number Theory*, 14, 2045-2081, (2018).

H. Furusho, On the coefficients of the Alekseev Torossian associator, *Journal of Algebra*, 506, 364-378, (2018).

M. Kaneko, H. Tsumura, Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, 232, 19-54, (2018).

N. Kawasaki, Y. Ohno, Combinatorial proofs of identities for special values of Arakawa-Kaneko multiple zeta functions, *Kyushu J. Math.*, 72, 215-222, (2018).

M. Kaneko, S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Math.*, 24, 2499-2521, (2018).

H. Nakamura, K. Sakugawa, Z. Wojtkowiak, Polylogarithmic analogue of the Coleman-Ihara formula, I, *Osaka J. Math.*, 54, 55-74, (2017).

金子昌信：2017 年度日本数学会代数学賞「準保型形式と多重ゼータ値の研究」

## 7. ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~kaneko-labo/kibans/>