科学研究費助成事業（基盤研究（Ｓ））公表用資料
〔平成３１年度（2019 年度）研究進捗評価用〕

平成２８年度採択分
平成３１年３月２２日現在

非線形解析学と計算流体力学の協働による乱流の数学的理論の新展開

New development of mathematical theory of turbulence by collaboration of the nonlinear analysis and computational fluid dynamics

課題番号：16H06339

小薗　英雄（KOZONO, HIDEO）
早稲田大学・理工学術院・基幹理工学部・教授

研究の概要（４行以内）
非線形偏微分方程式の手法、特に調和解析学と関数解析学を用いてナビエ・ストークス方程式の解の性質を、数学的厳密理論の観点から考察する。領域のサイズの影響やエネルギー減衰といった数値計算では扱えない無限大や極限操作を研究対象とし、大規模な流れを記述する適切なモデルの構築行うと同時に乱流の普遍原理の解明に数学的な確証を与える。

研　究　分　野：偏微分方程式論、非線形解析学
キ　ー　ワ　ー　ド：ナビエ・ストークス方程式、調和解析学、関数空間論、大域的適切性、乱流の統計理論

１．研究開始当初の背景

研究代表者はナビエ・ストークス方程式の解のエネルギー減衰について先駆的な研究を行ってきた。 実際、得られた減衰の漸近紙数は最良であることが証明された。 更に、この漸近指数は数値計算による計算結果と完全に一致することが明らかになった。数値計算結果との整合性はそのモデルの信頼性を保障するには極めて有効である。調和解析学の手法においても同様に、まずは有限領域で計算を実行するが、領域のサイズをパラメータとし、それを無限大に発散させたしときの漸近状態を評価することが鍵となる。

２．研究の目的

非線形解析学と計算流体力学の手法を駆使して、流動現象の本質である乱流の解明に挑戦する。様々な物理的パラメータを固定した有限部分の計算に関しては、現代解析学は計算科学に役目を譲りつつあった。しかし、大型計算機を駆使しても観測が困難な極限状態をよりよい精度で予測するためにその有用性が再認識されている。実際、無限大や極限操作といった数学解析固有の方法が、大規模計算を不可欠な研究手段とする乱流現象の解明や、従来数理的な裏付けの乏しかった乱流理論や乱流モデルの構築に新たな知見を与えるからである。本研究では経験則や直感に過度に依存しない信頼性の高い乱流の数学的理論の確立、乱流の数理モデルの開発を目指す。

３．研究の方法

本研究は、非線形解析研究班と流体力学研究班の連携によって推進する。非線形解析研究班では、非線形偏微分方程式の手法、特に調和解析学と関数解析学を用いてナビエ・ストークス方程式の解の性質を、数学的厳密理論の観点から考察する。領域のサイズの影響やエネルギー減衰といった数値計算では扱えない無限大や極限操作を研究対象とし、大規模な流れを記述する適切なモデルの構築行うと同時に乱流の普遍原理の解明に数学的な確証を与える。流体力学研究班では、計算科学的方法、特に大規模直接数値シミュレーションによる乱流現象の解明、及び数理論的根拠を持ち、恣意的調節パラメータを含まない情報縮約手法の開発に挑戦する。

４．これまでの成果

1. 流体力学の基礎方程式
(i) 3 次元空間における定常 Navier-Stoes 方程式における Liouville 型定理
(ii) 外部領域における準線形双曲型モデル流体方程式の球対称解の漸近挙動
(iii)非斉次 Dirichklet 境界条件下における Navier-Stokes 方程式の時間大域的な強解の存在とその漸近的減衰
(iv) Stokes 方程式の固有値の Hadameard 変分公式とその応用
(v) Lorentz 空間に外力をもつ Navier-Stoes 方程式とその自己相似解への応用
(vi) Navier-Stokes 方程式の一般化された適

切な弱解のエネルギー有限性と2次元非有界領域における Liouville 型定理
(vii) 特異なデータを有する Navier-Stokes 方程式
(viii) Navier-Stokes 時間の重み付き Besov 空間における研究
(ix) 柱状領域におけるスリップ境界条件下での圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の漸近挙動
２．乱流のもつ普遍的法則性
(i) 乱流の小さなスケールにおける普遍法則
(ii) 非圧縮性一様乱流の大規模構造
３．情報縮約手法の開発
(i) ウェーブレット解析に基づく手法:Euler 方程式の正則化
(ii) ウェーブレット解析に基づく手法:平行二平板乱流
(iii) 非圧縮性一様乱流中の慣性粒子クラスタリングのクロージャー手法の開発
(iv) 境界条件のモデル化

５．今後の計画

(I) 調和解析学、 特異極限と有限性の影響評価

乱流の発生で重要な渦構造について、その典型であるバーガース渦層の挙動を考察する。全循環量や渦レイノルズ数を与えて、バーガース渦の周りで渦度方程式を解くことは、流体力学の数理解析、特に非線形偏微分方程式に対する差し迫った要請である。

(II) 境界層の数理解析と粘性極限

2 次元上半平面において、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式、Prandtl 方程式の３つの運動方程式の解の差を空間に関して大域的に粘性係数に関して漸近展開することを試みる。具体的には、そのような展開可能な時間を初期値の属する関数空間のノルムで評価する。加えて、漸近展開の形から境界層の厚さが粘性係数の平方根に比例することに対する数学的な検証を与える。

(III) 乱流のもつ普遍的法則性の解明

乱流の運動エネルギーの減衰については最近ある程度分かってきたが、乱流によって運ばれる物質や熱の揺らぎについてはまだ不明のことが多い。ここではそのような量の代表的なものとしてパッシブスカラーの減衰則について解明を目指す。特に DNS における計算領域サイズ L の有限性に注目し検証を行う。

(IV) 情報縮約手法の開発、予測可能性と信頼性の評価

LES に加えて、フーリエ解析とは異なりスケールおよび場所の情報も表現できるウェーブレット解析に基づいて秩序渦に着目してモデル化する手法(秩序渦手法) の開発を目指す。

６．これまでの発表論文等（受賞等も含む）

1. Kozono, H., Shimizu, S., Navier-Stokes equations with external forces in Lorentz spaces and its application to the self-similar solutions. J. Math. Anal. Appl. 458 (2018), 1693--1708.

2. Kozono, H., Terasawa, Y., Wakasugi, Y., Finite energy of generalized suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations and Liouville-type theorems in two dimensional domains. J. Differential Equations 265 (2018), 1227--1247.

3. Kozono, H., Shimizu, S., Strong solutions of the Navier-Stokes equations with singular data. Mathematical analysis in fluid mechanics-selected recent results, 163--173, Contemp. Math., 710, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

4. Kozono, H., Shimizu, S., Navier-Stokes equations with external forces in time-weighted Besov spaces. Math. Nach. 291(2018), 1781--1800.

5. Kozono,H., Terasawa,Y., Wakasugi Y., Remark on Liouville-type theorems for the stationary Navier-Stokes equations in three space dimensions. J. Funct. Anal. 272(2017), 804--818.

6. Hashimoto, I., Kozono, H., Asymptotic behavior of radially symmetric solutions for quasilinear hyperbolic uid model in higher dimensions, J. Differential Equations. 262 (2017),5133--5159.

7. Farwig. R., Kozono, H., Wegmann, D., Existence of strong solutions and decay of turbulent solutions of Navier-Stokes equations with nonzero Dirichlet boundary data, J. Math. Anal. Appl. 453 (2017), 271--286.

8. Farwig. R., Kozono, H., Wegmann, D., Decay of non-stationary Navier-Stokes equations with nonzero Dirichlet boundary data. Indiana Univ. Math. J. 66 (2017), 2169--2185.

9. Jimbo. S., Kozono, H., Terammoto, Y., Ushikoshi, E. Hadamard variational formula for eigenvalues of the Stokes equations and its application. Math. Ann. 368 (2017), 877--884.

・小薗英雄
平成 28 年度　科学技術分野の文部科学大臣表彰科学技術賞
業績名　流体力学の基礎方程式に関する数学的研究
・前川泰則
2019 年度日本数学会賞春季賞
業績題目：流体力学の数学解析の新展開
2018 年 JMSJ 論文賞

7. ホームページ等

早稲田大学 理工学術院総合研究所
https://www.waseda.jp/fsci/wise/initiatives/
早稲田大学　理工学術院総合研究所　重点研究領域「数理科学研究所」
http://www.ims.sci.waseda.ac.jp/