

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：12601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2016～2017

課題番号：16H06710

研究課題名(和文)極小モデル理論と特異点理論

研究課題名(英文)Minimal model program and singularity theory

研究代表者

中村 勇哉(Nakamura, Yusuke)

東京大学・大学院数理科学研究科・助教

研究者番号：20780034

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究において(1)Witt vector cohomologyの消滅定理，(2)ACC予想，について研究を進めた。

(1) 田中公氏との共同研究により，Witt vector cohomologyのNadel型の消滅定理を，標数が7以上の3次元ファノ多様体に対して証明した。その応用として，連結性定理を証明したほか，有理点問題に応用を得た。(2) またBirkarによるBAB予想の解決に用いられた手法を理解し，ACC予想の研究に応用することを試みた。

研究成果の概要(英文)：I studied the following two topics: (1)Vanishing theorem of Witt vector cohomology. (2) The ACC conjecture.

(1) As joint work with H. Tanaka, we prove vanishing theorems of Witt vector cohomology of Nadel type for 3-dimensional Fano varieties (characteristic > 5). We have two applications. One is the connectedness lemma. Another one is a rational point formula. (2) I study the paper by Birkar on the BAB conjecture, and try to apply the ACC conjecture.

研究分野：双有理幾何学

キーワード：極小モデル理論 ACC予想 有理点問題

1. 研究開始当初の背景

双有理幾何学の目標は、各双有理同値類の中から性質の良い代表元を見つけることである。1980年代、森重文らによって「性質の良い代表元」を見つけ出すための具体的な方法論、極小モデルプログラム(MMP)、が提起された。その方法論は、「部分多様体をつぶすことを繰り返し行うことで、性質の良い多様体(=極小モデル)に到達する」のではないかとこのプログラムがうまく機能し、有限回のステップの後に終了することを証明するには、「フリップという操作の存在」と「フリップが無限に続かないこと」を証明する必要がある。近年、Birkar, Cascini, Hacon, McKernanにより前者の「フリップの存在」が証明されたが、後者の「フリップの停止問題」は未だ解決されていない。これにより「フリップの停止問題」を解決することが双有理幾何学における大きな目標となっている。

2. 研究の目的

この研究では特異点理論の方向から「フリップの停止問題」を解決することを目指している。特に、特異点理論におけるLSC予想とACC予想と呼ばれる2つの予想について研究してきた。この二つの予想はMLDと呼ばれる特異点の不変量に関する予想である。そしてこの予想の意義は、この二つの予想を認めると「フリップの停止問題」が解決する点にある。

LSC予想は(特異点の不変量が通常みたくべき)半連続性を主張している。一方でACC予想は不変量として取り得る値が昇鎖律をみたす(即ち、真に上昇する無限列を持たない)ことを主張している。LSC予想を認めると有限回のフリップののちにMLDが上昇することがわかるため、ACC予想と組み合わせることによってフリップが無限に続かないことを証明することができる。

3. 研究の方法

LSC予想とACC予想を解決するために、関連する2つの予想を立てた。

1つ目は、LSC予想に関連した予想で「ログ対のログ特異点解消に現れる例外因子の交わり方に関する予想」である。LSC予想をこの予想に言い換えた利点は、局所的な予想であるLSC予想を因子の交わり方という大域的な情報に言い換えたことであり、既存の極小モデル理論の枠組みで解決に挑めるのではないかと考えられるからである。また様々な具体例において、LSC予想を確かめるよりも予想1を確かめる方が楽なことが多いことが分かった。以上のことから、予想1を経由してLSC予想を研究することは筋の良い方法だと考えた。

2つ目は、ACC予想に関連した予想で、

「MLDの情報を得るのに必要なブローアップの回数に関する予想」である。一般に、特異点解消に必要なブローアップの回数は特異点ごとに様々であり、その回数に上界は存在しない。しかしながら「MLDの情報を取り出すために必要なブローアップの回数は制限できるのではないか」という問が予想2である。ACC予想との関係は「予想2から固定された多様体に対するACC予想が従う」である。また予想2の信憑性として、トーリック多様体の場合及び、2次元多様体の場合に予想2が成立することを既に確認している。

また近年になってBirkar氏によりBAB予想(ファノ多様体の有界性に関する予想--特異点がある程度良いファノ多様体がある--が証明された。MLDのACC予想と直接は関係がないものの、BAB予想はACC予想の大域バージョンとも見ることができると、関連を調べ、BAB予想の応用を見つかることも目標とした。

さらに標数0の研究の応用・アナロジーとして、正標数の極小モデル理論を研究する。正標数の極小モデル理論は3次元かつ標数が7以上の場合に研究が知られている。これを対数的標準対に拡張することを目指す。この方法論の動機は、成功すれば正標数の多様体の分類理論に進展を与えることができるためである。

4. 研究成果

(1) Mustata氏との共同研究として、ACC予想に関連して「MLDの情報を取り出すために必要なブローアップの回数は制限できるのではないか」という問(予想A)を研究した。ACC予想に関連したイデアル進半連続性予想との同値性を示したほか、ジェネリック・リミットに関連する既存の予想との関係性を示した。さらに、トーリック多様体に関する場合と2次元多様体の場合を考察し、予想Aを証明することができた。

(2) Mustata氏との共同研究として、ACC予想に関連して「ログ対のログ特異点解消に現れる例外因子の交わり方に関する予想」(予想B)を研究した。まず、この予想とLSC予想とPIA予想との関連を調べ、ある種の同値性を証明することができた。3次元の場合や、より一般にエクストラクションが存在する場合について考察し、予想Bを証明することができた。これによりこの場合についてLSC予想の新たな視点からの証明を与えることができた。

(3) 正標数の極小モデル理論の研究をした。正標数の極小モデル理論は3次元かつ標数が7以上の場合に研究がなされていた。特に川又対数的端末特異点を持つ多様体に対して極小モデルプログラムがうまくいくことが

証明されていた。今回、橋詰氏と田中氏との共同研究により、同じ次元と標数ではあるものの、対数的標準対に対しても極小モデルプログラムがうまくいくことを証明することができた。これにより、今後、対数的標準対に対する分類理論に応用があると期待できる。

(4) 有限体上定義されたファノ多様体上の有理点について研究をした。非特異ファノ多様体に対しては Esnault 氏によって有理点が存在することが証明されていた。今回、権業氏と田中氏との共同研究によって、3次元かつ標数が7以上の場合に、非特異という条件を川又対数的末端特異点に拡張することができた。さらにこの研究の中で、Witt層に対する川又-Viehweg型の消滅定理を証明することができた。

(5) (4)の研究の延長として、対数的標準対の場合に現れる新しい現象について、田中氏と共同研究をした。この場合には川又対数的末端特異点領域上の有理点の数が基礎体の元の数で割り切れるという予想を立て、3次元かつ標数が7以上の場合に証明することができた。この定理はWitt層のNadel型の消滅定理を証明し、その系として得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

1. M. Mustata, Y. Nakamura, "A boundedness conjecture for minimal log discrepancies on a fixed germ", Contemporary Mathematics に掲載決定済み.
2. Y. Gongyo, Y. Nakamura, H. Tanaka, "Rational points on log Fano threefolds over a finite field", J. Eur. Math. Soc. に掲載決定済み.
3. Y. Nakamura, J. Witaszek, "On base point free theorem and Mori dream spaces for log canonical threefolds over the algebraic closure of a finite field", Math. Z. 287, no. 3-4, 1343-1353, 2017.

[学会発表](計13件)

1. Y. Nakamura, Vanishing theorems of Witt-vector cohomology for Fano threefolds, Higher dimensional algebraic geometry, The University of Tokyo, Japan, March 12-16, 2018.
2. Y. Nakamura, A rational point problem on singular Fano threefolds, Algebraic Geometry seminar, Kumamoto University, Japan, February 7, 2018.

3. Y. Nakamura, A vanishing theorem of Witt-vector cohomology for Fano threefolds, Algebraic geometry in positive characteristic and related topics, Hosei university, Japan, January 30- February 1, 2018.
4. Y. Nakamura, vanishing theorem of Witt-vector cohomology for Fano threefolds, Classification and Moduli Theory of Algebraic Varieties, Hotel Continental Ischia, Italy, September 10-17, 2017.
5. Y. Nakamura, An application of the ACC for LCT'S to the ACC for MLD's, NCTS Workshop in Higher Dimensional Algebraic Geometry, National Taiwan University, Taiwan, June 19-23, 2017.
6. Y. Nakamura, A rational point formula on singular Fano varieties over a finite field, BICMR-Tokyo Algebraic Geometry Workshop, Beijing International Center for Mathematical Research, China, May 5-7, 2017.
7. Y. Nakamura, Birkar's paper "Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties" explanation, NCTS Workshop on Singularities, Linear Systems, and Fano Varieties, National Taiwan University, Taiwan, April 13-16, 2017.
8. Y. Nakamura, Rational points on log Fano threefolds over a finite field, Cambridge-Tokyo Algebraic Geometry workshop 2017, University of Cambridge, U.K., March 16-17, 2017.
9. Y. Nakamura, New formulation of the number of rational points on singular Fano varieties over a finite field, The 2nd Higher dimensional algebraic geometry Echigo Yuzawa symposium, Yuzawa-cho Kouminkan, Japan, February 13-17, 2017.
10. Y. Nakamura, Rational points on log Fano threefolds over a finite field, Workshop on Higher Dimensional Algebraic Geometry, Holomorphic Dynamics and Their Interactions, National University of Singapore, Singapore, January 9-20, 2017.
11. Y. Nakamura, A boundedness conjecture for minimal log discrepancies, Algebraic Geometry Seminar, KIAS, Korea, August 16, 2016.
12. Y. Nakamura, Birkar's paper "Anti-pluricanonical systems on Fano varieties" explanation, Summer School on Algebraic Geometry, Tambara, Japan, September 30- August 3, 2016.

13. Y. Nakamura, Rational points on log Fano threefolds over a finite field, Tokyo-Princeton algebraic geometry conference, Princeton University, U.S., May 7-10, 2016.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

中村 勇哉 (NAKAMURA Yusuke)

東京大学・大学院数理科学研究科・助教

研究者番号：20780034