2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｈ０６９１４
研究課題名（和文）過負荷状態にある待ち行列の振る舞いに関する研究

研究課題名（英文）Studies on the behavior of overloded queueing systems

研究代表者
井上　文彰（Inoue, Yoshiaki）

大阪大学・工学研究科　・助教

研究者番号：４０７７９９１４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：システムへの潜在的な入力が過負荷である状況を表現可能な待ち行列モデルに関する研究を行った．混雑度が高くなるにつれてシステムへの入力負荷が軽減されるモデルとして，客の待ち時間に制約のある待ち行列モデルを主に解析した．客の待ち時間制約が相型分布に従うM/G/1+PH待ち行列に対し，ロス確率および系内客数分布に対するアルゴリズム的解法を確立した．また，客の集団到着を許すM[x]/G/1+G待ち行列を考え，一つの集団内で同一の待ち時間制約を取るモデルと，各客の待ち時間制約が独立に決まるモデルを解析した．さらに，区分的に線形な幅広い連続時間確率過程について成立する不変式の導出を行った．

研究成果の概要（英文）：We studied queueing models which can represent situations that the offered load exceeds the service capacity of the system. We mainly dealt with the queueing models with impatient customers, where new arrivals to the system are (fully or partially) rejected when the system is congested. For the M/G/1+PH queue, we established algorithmic analytic methods for the stationary loss probability and the stationary queue-length distribution. We further considered batch-arrival queueing models with impatient customers (M[x]/G/1+G queues). We analyzed two types of M[x]/G/1+G queues: In the first variant, customers in the same batch have the same patience time, while in the second variant, patience times of all customers are independent. In addition, we derived a general relation for the stationary distribution of continuous-time stochastic processes whose sample-paths are piece-wise linear.

研究分野：待ち行列理論

キーワード：待ち行列理論　M/G/1+G　行列解析法　マルコフ過程

１．研究開始当初の背景

有限の処理能力のシステムを複数の利用者が共有するとき，しばしば混雑や待ちの問題が発生する．身近な所で言えば，学生食堂，病院の待合室，空港のゲート，繁忙期の高速道路，高層ビルのエレベータなど，例を挙げると限りない．特に，実用的な興味から長く研究がなされてきたものに，情報通信システムにおいて生じる通信データの混雑があり，このような混雑のことを通常は輻輳と呼ぶ．待ち行列理論は，混雑や待ちが起こる状況を確率過程としてモデル化し，その振る舞いを数理的に解明することを通じて，システムの合理的な設計を支える応用数学の理論である．

待ち行列理論では，客の到着間隔や利用要求の大きさの確率分布で表される「入力の性質」と，システムの振る舞いを表す各種の性能指標との関係が数理的に解析される．入力の性質を表す指標として最も基本的な量は，客の平均到着率と平均の利用要求量の積で定義されるトラヒック強度ρであり，これはシステムへの負荷の大きさを表す．待ち行列の解析では通常，システムの単位時間あたりの処理能力が 1 となる単位系を取った上で，$\rho < 1$という仮定（安定条件）をおく．安定条件が満たされるシステムでは，十分に時間が経過すると，システムの性能指標を表す確率分布が初期条件によらず一意に収束し，また，$1-\rho$は通常のモデルではシステムが空である時間割合π_0に一致する．

一方，現実の待ち行列ではπ_0が 0 に近い，すなわち，待ち行列がほとんど途絶えずにシステムが稼働するような状況が少なくない．このような場面は，前述の日常的な例でも度々遭遇するものであるし，帯域資源が潤沢に有る場合を除けば，これに近い状態で通信システムが利用されることも珍しくない．ところが，$\pi_0 = 1-\rho$となる通常のモデルでは，ρが1に近くなると待ち行列長などが極めて大きい値を取り，特に$\rho \to 1$ の極限で無限大に発散するなど，現実では理解し難い現象がモデルから予言されてしまうことになる．

２．研究の目的

実際の待ち行列において，π_0が 0 に近いにも関わらず待ち行列長などが現実的なサイズに留まるのは，システムの混雑時に入力の性質が変化するためであると考えられる．これは，システムへの本来の入力は過負荷であるが，混雑が大きいときは入力が抑制・棄却されることでシステムの安定性が保たれると言い換えられる．例えば，現在のインターネットを流れるトラヒックの多くを占める TCP フローでは，輻輳制御アルゴリズムによって通信路の混雑を検知して自動的に送信レートを下げる仕組みが備わっている．また, 無線 LAN などの近距離無線通信で広く使用されている CSMA/CA というメディアアクセス制御プロトコルでは，他端末との電波干渉を検知するとデータ送信頻度を低くし，データ送信の衝突を回避している．

以上のように，π_0が 0 に近い現実のシステムにおいては，元々の入力が過負荷になっていると考えるのが合理的である．本研究の目的は，上記のような過負荷であり，かつ，混雑時にはシステムへの入力負荷が抑制されるような待ち行列モデルに対する解析手法の数理的基礎付けを行うこと，ならびに，計算機上で実行可能な数値計算法を確立することにある．

３．研究の方法

(1) システムの混雑度合いが大きくなるにつれて客の到着が棄却される割合が増加する待ち行列を考える．この状況と同じ構造を有するモデルが，客の待ち時間に制約のある待ち行列モデルである．このモデルでは，客の経過待ち時間が待ち時間制約を超えた場合に，その客はサービスを受けることなくシステムから即座に退去し，結果として待ち時間が増えるにつれて到着が棄却されやすくなる．待ち時間制約のある待ち行列モデルは古くから多数の研究があるが，その性能指標の数値計算については十分な検討がなされていない．本研究では，このモデルの性能指標に対する数値計算法の確立を通じて，客の到着が棄却されるモデルの解析ならびに数値計算に対する基礎付けを行う．

(2) システムの混雑度合いが大きくなるにつれて客の到着が棄却されるのに加え，客のサービス要求量が減少する待ち行列を考える．本研究では，このような挙動と関連の深いモデルとして，待ち時間に制約のある集団到着待ち行列モデルを考察する．このモデルは，客が一人ずつ到着する場合と異なり，待ち時間制約によって集団の一部が棄却される結果，待ち時間が長いときに客のサービス要求量が減少するモデルと同じ構造となっている．待ち時間制約のある待ち行列において集団到着のあるモデルは，その複雑さからほとんど解析結果が報告されていない．本研究では，このモデルにおける解析可能なクラスを提示し，待ち時間の影響を受けて客のサービス要求量の長さが変化するモデルについて新しい知見を得ることを試みる．

(3) 待ち行列モデルの解析において頻繁に取り扱われる数学的対象である，区分的に線形な確率過程に対する一般的な関係式を導出する．このような確率過程においては，ジャンプが発生する直前と直後に注目して得られる事象平均の確率分布を用いて，時間平均の確率分布が特徴づけられるということが，数多くの個別のモデルについて知られている．本研究ではこの結果を，緩い条件の下,

標本路解析によって証明する．さらに，その結果を用いて，レベル 0 への再帰が起こらない，極端な過負荷状況に相当する確率過程における定常分布の解析法を示す．

４．研究成果

(1) 待ち時間制約の長さが相型分布に従う M/G/1 待ち行列モデル(M/G/1+PH)を解析し，ロス確率に対する数値計算アルゴリズムを開発した．相型分布は連続時間吸収マルコフ連鎖の吸収時間が従う分布として与えられる確率分布であり，あらゆる非負確率分布を任意の精度で近似することが可能である．M/G/1+PH 待ち行列を含む一般のモデルである M/G/1+G 待ち行列において，仮待ち時間分布の密度関数がヴォルテラ第二種積分方程式の解として一意に定められること，ならびにロス確率は仮待ち時間分布を用いて与えられることが既に知られていた．しかし，これらの結果は，ロス確率を数学的に特徴づけているものの，これをもとにロス確率を精度良く数値計算する方法についてはごく特殊な場合を除いて報告されていなかった．本研究では，連続時間マルコフ連鎖に対する一様化法と呼ばれるテクニックを応用することで，相型分布の補分布関数がポワソン分布の確率関数で重み付けられた無限級数に展開されることに着目した．このような変形を行うことにより，仮待ち時間分布の密度関数が満たす連続的な関係式を離散の行列演算として書き換えることができ，その事実を用いてロス確率を非負行列演算の繰り返しによって特徴づけた．さらに，その演算を有限回数で打ち切ることによって数値計算結果に混入する数値誤差の上界を理論的に与え，ロス確率に対する誤差評価付きの数値計算アルゴリズムとしてまとめた．

(2) (1) と同じ M/G/1+PH 待ち行列モデルに対し，系内客数分布の数値計算法を開発した．M/G/1+PH 待ち行列の特別な場合である M/PH/1+PH 待ち行列を考えると，その系内客数過程はレベル依存する準出生死滅過程として定式化される．この準出生死滅過程では，マルコフ性を担保するために待ち客の残り待ち時間制約長をすべて記憶する必要があり，結果としてレベルに関して背後状態数が指数関数的に増大するという問題がある．そのため，このモデルはレベル依存する準出生死滅過程の定常分布に対する汎用的な数値計算アルゴリズムでは計算が困難なモデルとなっている．本研究では (1) で得られた成果を発展させることで，M/G/1+PH 待ち行列の系内客数分布に対する実行可能な数値計算アルゴリズムを確立した．初めに，系内客数分布が仮待ち時間分布を用いて与えられるという関係式を導出し，その結果を前述の一様化のテクニックと組み合わせることで，系内客数分布が非負行列演算の繰り返しによって与えられることを証明した．さらに，演算を有限回数で打ち切ることによって生じる切断誤差の上界を理論的に与えた．これによって，客が一人ずつ到着するモデルに関しては，システムの混雑によって到着に制限がかかるモデルに対する数値計算アルゴリズムの基礎的事項が整備された．

(3) 待ち時間に制約のある集団到着 M/G/1 待ち行列（M[x]/G/1+G）を解析した．待ち時間制約のある状況下で客の集団到着を考えている先行研究はほとんど無く，本研究では，集団到着を考えた場合，待ち時間制約の種別として二種類のモデル化が考えられることを見出した．一つ目のモデル（M[x]/G/1+G[same]）では，同一の集団に属する客は全て同一の待ち時間制約長を有することを仮定する．一方で，二つ目のモデル（M[x]/G/1+G[diff]）では，それぞれの客の待ち時間制約が独立に同一分布に従うものと仮定する．待ち時間制約が固定長であるモデル（M[x]/G/1+D)は，これら二種類のモデル両方の特別な場合となる．本研究ではまず，M[x]/G/1+G[same]と M[x]/G/1+G[diff]の仮待ち時間分布ならびにロス確率に対する統一的な解析のアプローチを示した．具体的には，これらのモデルにおける仮待ち時間分布の密度関数が共通して満たす積分方程式を導出し，これらのモデルにおける仮待ち時間分布の解析がその積分方程式に含まれる 2 変数関数 G(x|y)の導出に帰着されることを示した．ここで，G(x|y)は，仮待ち時間が y であるときに到着した集団がシステムに持ち込む実質的な仕事量の分布関数を表し，M[x]/G/1+G[same]と M[x]/G/1+G[diff]では異なる形式を取る．上記を踏まえて，M[x]/G/1+G[same]および M[x]/G/1+G[diff]の G(x|y)を考察した．M[x]/G/1+G[same]では G(x|y)は比較的見通しの良い形式で与えられ，集団サイズが従う分布，サービス時間分布，ならびに待ち時間制約分布を特別化することで，ロス確率などの諸量が簡便な公式から求められることを示した．一方，M[x]/G/1+G[diff]における G(x|y)は複雑な構造を持つため，一般の公式を書き下すことは難しい．本研究では集団サイズが幾何分布に従うことを仮定すると，G(x|y)が第二種ヴォルテラ積分方程式の解を用いて与えられ，それを用いてロス確率などが特徴づけられることを証明した．

(4) 幅広い連続時間定常確率過程の時間平均分布に対して成立する不変式を導出した．区分的に線形かつ傾きが一定である連続時間確率過程 X(t)を考え，その任意の標本路において，X(t)が与えられた値 x 以下にとどまっている時間平均割合の極限分布の密度関数が，この確率過程においてジャンプが発生する直前ならびに直後において X(t)が x 以下にとどまっている事象平均割合の極限分布を用いて与えられることを証明した．本研究

では，この不変式の応用として，情報理論の分野において最近導入された新しい性能指標である Age of Information (AoI) の定常分布が満たす一般的な公式を導出した．AoI とは，情報源の状態を常時モニタリングする状況において，観測者が現在把握している情報の鮮度を定量化する指標であり，現在の時刻と最後に取得した観測データのタイムスタンプとの差で定義される．AoI は通常，連続時間の確率過程として定式化されるが，通常の待ち行列における仮待ち時間過程などとは異なり，レベル 0 への再帰が起こらないという特殊な遷移構造を持っており，本研究の主題である過負荷な待ち行列モデルの挙動と深い関連を持っている．これに起因する挙動の複雑さから，先行研究では AoI の時間平均，すなわち１次モーメントのみが解析の対象となっていたが，不変式に基づいた本研究のアプローチにより，AoI の高次モーメントや，確率分布関数そのものが解析可能であることが示された．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

1. Y. Inoue and T. Takine, ``A computational algorithm for the loss probability in the M/G/1+PH queue," Stochastic Models, vol. 33, no. 1, 116-148, 2017.

2. Y. Inoue, O. Boxma, D. Perry, and S. Zacks, ``Analysis of M^x/G/1+G queues with impatient customers," to appear in Queueing Systems.

〔学会発表〕（計　5　件）

1. 井上文彰, ``M/G/1+PH 待ち行列における系内客数分布について," 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年秋季研究発表会，山形, 2016 年 9 月.

2. 井上文彰, ``M/G/1+PH 待ち行列における系内客数分布の数値計算法," 2016 年度待ち行列シンポジウム，東京, 2017 年 1 月.

3. 井上文彰, ``M/G/1+PH 待ち行列における系内客数分布の階乗積率," 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年春季研究発表会，那覇, 2017 年 3 月.

4. Y. Inoue, H. Masuyama, T. Takine and T. Tanaka, ``The stationary distribution of the age of information in FCFS single-server queues," The 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT 2017), Aachen, Germany, June, 2017.

5. Y. Inoue, ``Numerical computation of the stationary queue length in the M/G/1+PH queue," 21st Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS 2017), Quebec, Canada, July, 2017.

６．研究組織
(1)研究代表者

井上　文彰（INOUE, Yoshiaki）
大阪大学・大学院工学研究科・助教
研究者番号：40779914