2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１４４０１

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2016～2017

課題番号：１６Ｈ０７０４１

研究課題名（和文）非平衡定常状態の流体力学極限に対する大偏差原理による解析

研究課題名（英文）Analysis on stationary non-equilibrium states via large deviation principle for hydrodynamic limit

研究代表者

角田　謙吉（Kenkichi, Tsunoda）

大阪大学・理学研究科・助教

研究者番号：１０７８３９３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：流体力学極限に対する大偏差原理を用いて、非平衡定常状態について研究を行った。具体的には、粒子の生成と消滅を伴う排他過程の定常状態に対して大偏差原理を示すことにより、粒子系の定常状態を解析することを目的にした。結果として、粒子数密度のスケール極限に対応する大偏差原理を示した。またこれを用いて定常状態に対して大偏差原理を示すことに成功した。大偏差原理による帰結として、定常状態に対する大数の法則も得ることが出来た。

研究成果の概要（英文）：Based on techniques of the large deviation principle for hydrodynamic limit, I studied stationary non-equilibrium states. The purpose of this study is to analyze stationary states for particle systems by showing the large deviation principle for the stationary state of exclusion processes with creation and annihilation of particles. Consequently, I proved the large deviation principle for the scaling limit related to density of particles. Using this result, I also proved the large deviation principle for the stationary state. As a consequence of the static large deviation principle, I also obtained the law of large numbers for the stationary state.

研究分野：確率論

キーワード：確率論　流体力学極限　大偏差原理　スケール極限　粒子系　大規模相互作用系

１．研究開始当初の背景

偏微分方程式により記述される巨視的な系を粒子系等の微視的な系から研究することは、数理科学の分野において、歴史的に古典的な問題でありかつ現在においても重要な問題として様々な分野において考えられているが、その数学的解析は容易ではない。例えばハミルトン力学に従う粒子系から出発して、熱方程式等の偏微分方程式を数学的に導出することは一般には非常に難しい問題である。そこで確率的に運動する相互作用を伴った粒子系から出発し、時空間に関するスケール極限を考えることにより、偏微分方程式を導出するという手法がこれまで数多く研究されて来た。そのような手法及びスケール極限は標語的に流体力学極限と呼ばれる。流体力学極限は１９８０年代を中心に様々な数学者及び物理学者により研究されたが、現在においても多くの研究者の興味の対象となっている。実際、流体力学極限の理論の発展により、現在では物理学のみならず生物学や社会数理学等で現れる様々な微視的模型に対してその手法は有用である。

流体力学極限による手法は巨視的な方程式を導出するのみでなく、微視的な系と巨視的な系を繋ぐスケール極限としてそれらの関係を詳細に記述することが出来るという特徴も持つ。実際、流体力学極限は確率論の枠組みの中で大数の法則として定式化されることにより、関連する大偏差原理を考えることが可能である。考えられる微視的な系は排他過程や界面模型等様々な微視的模型が考えられる。国内外問わず界面模型等の連続系についての研究は様々なものがある。しかしながら、現在の所連続系に対しては流体力学極限の問題を解決することすら容易ではなく、対応する大偏差原理を考えることは難しい。一方排他過程と呼ばれる粒子系に対しては、大数の法則の精密化と考えられる大偏差原理がこれまでよく研究されてきた。これにより大偏差原理を用いて、非平衡定常状態について数学的に厳密な解析を進めることが可能である。ここで非平衡定常状態とは、端点で異なる温度を持った(1次元的な)棒が、時間無限大で到達する状態が一つの例である。

非平衡定常状態の流体力学極限による解析は、Bertini et al.によりこれまで活発に研究されているが、数学的に厳密な解析は限られた模型でしか成果を見せていない。先の例に対応する粒子系として、1次元区間上の境界で粒子が流入・流出する排他過程を考えることが出来る。しかしながら巨視的な偏微分方程式としてはディリクレ境界条件付きの熱方程式に対応しているため、巨視的な偏微分方程式としては非常に限定的である。実際、粒子の拡散のみでは多くの実現象を記述することが出来ない。線形な熱方程式に非線形性を与える反応項を加えるためには、粒子の生成と消滅を伴う排他過程を考えればよいことが De Masi et al.の研究により知られている。この粒子系に対する巨視的な偏微分方程式として、反応拡散方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式が極限の方程式として得られる。反応拡散方程式は主にパターン形成に関する実現象の模型として、様々な分野において考えられている重要な偏微分方程式である。

粒子の生成と消滅を伴う排他過程は数学的にはマルコフ過程により定義される。このマルコフ過程は時間発展に関して不変な分布を持つことが知られており、その分布は定常状態と呼ばれる。この定常状態が粒子の生成と消滅を伴う排他過程おける非平衡定常状態である。Bertini et al.の理論により、粒子の生成と消滅を伴う排他過程の非平衡定常状態についても幾らか解析を行うことが可能であったが、これまで数学的に厳密な結果ではなかった。

２．研究の目的

本研究の目的は、粒子の生成と消滅を伴う排他過程の定常状態を解析することである。より具体的に述べると、考えている粒子系において巨視的空間と微視的空間のスケール比を無限大にするときの漸近挙動を決定することである。この極限はスケール極限とよばれ、特に大偏差原理とよばれる極限定理を示すことが本研究の目的である。同種の模型における大偏差原理として、1次元区間上の境界で流入・流出する排他過程に対してはBertini et al.やBodineau-Giacominなどによる先行研究あり、定常状態が大偏差原理をみたすことが知られている。先行研究で用いられた手法は非常に広範な模型について成立すると考えられているので、粒子の生成と消滅を伴う排他過程の定常状態に対しても成立すると考えれるが、技術的に難しい点が幾つも生ずるためその解析は容易ではない。

先行研究の方針を一言で述べると、確率論でよく知られている理論であるFriedlin-Wentzell理論をある種の無限次元空間において再構成することである。それにより粒子系の定常状態は大偏差原理をみたすことが予想される。そのための最初のステップとして、動的な大偏差原理を示す必要がある。ここでいう動的な大偏差原理とは、先に述べた流体力学極限に対する大偏差原理のことである。

Friedlin-Wentzell理論では有限次元の拡

散過程に０ノイズ極限を取ることが考えられているが､そこでいうFriedlin-Wentzell型の大偏差原理が、本研究における流体力学極限に対する大偏差原理である。この動的な大偏差原理に関する重要なこととして、レート関数の下半連続性および劣レベル集合のコンパクト性が、定常状態に対して大偏差原理を示す際に重要な役割を果たすことがBodineau-Giacominによる先行研究において指摘されている。よってそれらを本研究の中で示さなければいけない。

動的な大偏差原理を示した後、定常状態に対して大偏差原理を示すためには、Friedlin-Wentzell理論で導入された準ポテンシャルについて解析を行う必要がある。境界で粒子が流入・流出する排他過程に対しては、流体力学方程式の定常解が一意的になるため、準ポテンシャルの解析は幾分単純化される。しかしながら粒子の生成と消滅を伴う排他過程の流体力学方程式は反応拡散方程式となり、一般にその定常解は一意的でない。この点は系の解析を非常に複雑にする点であり、準ポテンシャルを解析する際に技術的に困難になる。定常状態に対して大偏差原理を示せば、レート関数の零点を解析することにより、定常状態に対して大数の法則の一般化である測度の集中現象が示される。この測度の集中現象は、この模型においてある種の相転移現象を示すことがBodineau-Lagougeにより予想されていたので、その予想を数学的に示す結果を得ることが出来ると考えられる。

３．研究の方法

初めに動的な大偏差原理についての研究方法を述べる。粒子の生成と消滅を伴う排他過程は動的な大偏差原理をみたすことがJona Lasinio et al.により示されていたが、本研究の目的である定常状態に対して大偏差原理を示すためには不十分な結果であった。Jona Lasinioet al.はランダムな初期配置を考えていたが、後の利用のためには、決定的な粒子配置から出発する粒子系に対して大偏差原理を示す必要がある。決定的な初期配置の場合に対しても大偏差原理を示すためには、大偏差原理の下限評価において一般の密度の道を滑らかな密度の道により近似することが必要である。このことを示すために時間依存の軟化子を導入し、対応する偏微分方程式や動的な大偏差原理に対するレート関数の解析を行った。また先行研究においては動的な大偏差原理のレート関数が下半連続であり劣レベル集合がコンパクトであることが示されていなかったので、これについても取り組んだ。それらの性質を示すためにエネルギー評価に着目し、関数解析の種々の手法を用いて解析を行った。特に、時空に対する正則化の手順がこの解析においては重要な役割を果たし、畳み込み積の取り方を巧妙に工夫する必要がある。

次に定常状態に対する大偏差原理についての研究方法を述べる。先に述べたように証明の大まかな方針は､Friedlin-Wentzell理論をある種の無限次元空間において再構成することである。本研究において系の解析を複雑にする要因として、流体力学方程式の定常解が一意的でないことと、状態空間が無限次元空間であることが挙げられる。流体力学方程式の定常解が一意的でないことは準ポテンシャルの構造を複雑にし、また状態空間が無限次元であることはその準ポテンシャルの解析を困難にさせる。その要因として、状態空間は測度の集合になるが、その位相が弱位相により与えられている点にある。この弱位相は動的な大偏差原理を考える際に自然な位相であるため導入されるが、準ポテンシャルの解析においては幾つもの困難を生じさせるものである。それらの解決方法を次で説明する。

初めに流体力学方程式である反応拡散方程式の定常解は一意的でないが、ある条件の下で本質的に有限個しかないことに注意する。研究の主目的とは外れているものの、この点についても本研究で解析を行いポテンシャルに対する十分条件を与えた。それにより定常解が平行移動による同一視の下で有限個しかないので、定常状態は少なくともそれらに集中することが予想される。このことを詳しく見るために、反応拡散方程式の定常解(以下単に定常解)の近傍一つを状態空間とするマルコフ過程を導入した。これは準安定性と呼ばれる問題で考えられる跡過程とよばれるものに類似するものである。この定常解の一つの近傍から別の近傍に移動するマルコフ過程の定常状態に対して、非常に精密な漸近評価を与えた。この漸近評価を示すためには、準ポテンシャルの解析が重要な役割を果たす。準ポテンシャルの解析において困難となる点は、その正則性にある。準ポテンシャルは測度の集合上に定義された汎関数であるが、弱位相に関して連続ではない。そのためその正則性を考えることは重要である。この正則性の問題を解決するために、エネルギー不等式や関数解析学や偏微分方程式論における様々な手法を援用した。またFriedlin-Wentzell理論で展開されている一般論を駆使して、先の漸近評価を与えた。

ここまで定常解の近傍を動くマルコフ過程について解析を行ったが、定常状態に対して大偏差原理を示すためには十分ではな

い。大偏差原理を示すために残り解析すべきことは、定常解の近傍に直ちに到着すること、また定常解の近傍から一般の密度に適切なコストを掛ければ到達できることを示す必要がある。前者の問題を解決するために、反応拡散方程式の解の時間無限大での挙動を考える必要がある。これについては偏微分方程式論で知られているChen-Matanoの結果を先の目的のために必要な形で整え、それを用いた。後者の問題を解決するためには再び準ポテンシャルの正則性が重要な役割を果たす。適切なコストを求めるために、定常解の近傍以外に長時間滞在するためには正のコストが必要になるという、先見的に明らかな性質も必要になる。この性質を示すために本質的なのが、動的な大偏差原理のレート関数の下半連続性と劣レベル集合のコンパクト性である。それらの性質は証明を通して何度も用いられるが、特にこの性質の証明において重要な役割を果たしている。

４．研究成果

本研究における研究成果として、初めに粒子の生成と消滅を伴う排他過程に対して動的な大偏差原理を得ることができた。この結果はInstituto Nacional de Matemática Pura e AplicadaのClaudio Landim氏との共同研究であり、本研究の実施期間内に学術誌に掲載された。またこの動的な大偏差原理を用いて、定常状態に対して大偏差原理を示すことに成功した。またそのレート関数の零点を解析することにより、定常状態に対して測度の集中現象を示すことに成功した。この結果は先述のClaudio Landim氏とPontifical Catholic University of PeruのJonathan Farfan氏との共同研究であり現在学術誌に投稿中である。また本研究及び関連する研究のサーベイをまとめ、論文として投稿した。これについても本研究の実施期間内に学術誌に掲載された。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

1. C. Landim and K. Tsunoda. Hydrostatics and large deiations for a reaction-diffusion model. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist, **54**, (2018) 51-74, 査読あり.
2. K. Tsunoda. Scaling limits for Glauber-Kawasaki processes. RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B59**, (2016) 45-56, 査読あり.

〔学会発表〕（計８件）

1. Kenkichi Tsunoda, Hydrostatics for Glauber-Kawasaki processes, Seminário de Probabilidade e Combinatória, IMPA, 2018.
2. 角田　謙吉, Hydrostatics for an exclusion process with slow boundary revisited, 無限粒子系、確率場の諸問題 XIII, 奈良女子大学, 2017.
3. Kenkichi Tsunoda, Hydrostatics for Glauber-Kawasaki processes, 16th Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, 2017.
4. 角田　謙吉, Hydrostatics for boundary driven exclusion processes, 大阪大学確率論セミナー, 大阪大学, 2017.
5. Kenkichi Tsunoda, Phase transition for a reaction-diffusion model, 2017 Spring Probability Workshop, Institute of Mathematics, Academia Sincia, 2017.
6. 角田　謙吉, Exclusion process: in and out of equilibrium, Kick off Meeting for Stochastic Analysis on Infinite Particle Systems, 九州大学.
7. 角田　謙吉, Large deviations and its application for a reaction-diffusion model, 確率論シンポジウム, 京都大学, 2016.
8. 角田　謙吉, Scaling limits for systems with potential fields, 確率論サマースクール, 信州大学理学部, 2016.

〔その他〕

研究代表者のホームページ：

http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~tsunoda/

６．研究組織

(1)研究代表者

角田謙吉（TSUNODA KENKICHI）

大阪大学・理学研究科・助教

研究者番号：10783938

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし

(4)研究協力者
該当なし