

平成 30 年 9 月 20 日現在

機関番号：24402

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2016～2017

課題番号：16H07125

研究課題名(和文)特異曲面結び目のダイアグラムのPN同値類とその応用

研究課題名(英文)PN-equivalence of diagrams of singular surface-knots and its application

研究代表者

河村 建吾 (Kawamura, Kengo)

大阪市立大学・大学院理学研究科・数学研究所専任研究所員

研究者番号：00780727

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：特異曲面結び目のダイアグラムについて研究を行った。カンドルホモロジー群から曲面結び目の不変量(カンドルコサイクル不変量)が得られる。通常、この不変量は特異曲面結び目の不変量にならないが、特異曲面結び目のダイアグラムの局所変形に着目することで、特異曲面結び目の不変量となるようにカンドルホモロジー群を修正することができた。曲面結び目の3重点数は1にならないこと、球面結び目の3重点数は2または3にならないことが知られている。当研究では向きつけ可能な特異曲面結び目の3重点数は1にならないこと、ノードを1個持つ特異球面結び目の3重点数が2または3にはならないことを証明した。

研究成果の概要(英文)：We study about diagrams of singular surface-knots. An invariant of a surface-knot, called the quandle cocycle invariant, is obtained from quandle homology groups. Although this invariant usually does not become an invariant of a singular surface-knot, we can modify quandle homology groups to yield an invariant of a singular surface-knot by focusing on a local move of its diagram. It is known that the triple point number of a surface-knot is not equal to one and that the triple point number of a sphere-knot is not equal to two or three. In this research, we prove that the triple point number of an orientable singular surface-knot (with arbitrary number of nodes) is not equal to one and that the triple point number of a singular sphere-knot with one node is not equal to two or three.

研究分野：数物系科学

キーワード：特異曲面結び目 はめ込み曲面結び目 ダイアグラム 3重点数 カンドル カンドルコサイクル不変量

1. 研究開始当初の背景

曲面結び目は4次元ユークリッド空間内の連結閉曲面のことであり、3次元ユークリッド空間内の連結閉曲線としての結び目の高次元化である。一方、結び目を連結閉曲線から3次元ユークリッド空間への一般的写像の像であるとみなせば、その高次元化は連結閉曲面から4次元ユークリッド空間への一般的写像の像となり、それが特異曲面結び目である。言い換えれば、特異曲面結び目は4次元ユークリッド空間へはめ込まれた連結閉曲面であり、多重点は横断的な2重点(ノードという)を持つものである。従って、特異曲面結び目は曲面結び目と同様に結び目理論において重要な研究対象である。

曲面結び目は4次元空間内の図形であり直接描写することができないが、いくつかの表示方法が知られている。特に次の(1)~(4)の表示方法がよく用いられている。

(1)曲面ブレイド表示：ブレイドの高次元化である曲面ブレイドを用いて表す方法。

(2)ダイアグラム表示：4次元ユークリッド空間内の曲面結び目を3次元ユークリッド空間へ射影した像に上下の情報を加えたもの(ダイアグラムという)を用いて表す方法。

(3)動画法：4次元ユークリッド空間を3次元ユークリッド空間と時間軸の直積と考え、曲面結び目を3次元ユークリッド空間内の1次元図形(結び目など)の時間経過の軌跡として表す方法。

(4)仮想結び目表示：リボン型と呼ばれる曲面結び目を平面曲線(仮想結び目という)によって表す方法。

特異曲面結び目についてもこれら(1)~(4)の4つの方法が自然に期待される。(1)の曲面ブレイド表示については特異曲面ブレイドを用いた表示が知られている。(2)については特異曲面結び目のダイアグラムも同様に考えることができる。曲面結び目のダイアグラムはある7種類の局所変形(ローズマン変形という)を法とすると、曲面結び目の同値類と1対1に対応する。一方、特異曲面結び目のダイアグラムは7種類のローズマン変形に加えてどのような局所変形を法としたとき、特異曲面結び目の同値類と1対1に対応するかは知られていなかった。このような理由から特異曲面結び目の研究は特異曲面ブレイド表示を用いる研究が多く、ダイアグラム表示を用いる研究はこれまであまり行われていなかった。このことが本研究の動機となっている。

(3)については特異曲面結び目でも動画法が知られている。特に曲面結び目の動画法では標準形と呼ばれる特別な形状を用いて表

示できることが知られていた。研究代表者は大阪市立大学の鎌田聖一氏との共同研究で標準形を特異曲面結び目の場合に一般化することに成功した。また、曲面結び目がリボン型であれば、標準形に関して良い性質を持つことが知られている。研究代表者はリボン型の概念を特異曲面結び目の場合に拡張した。これをリボン・クラスプ型の特異曲面結び目という。リボン・クラスプ型の特異曲面結び目を標準形によって特徴付けることにも成功している。(4)については、研究代表者によってリボン・クラスプ型の特異曲面結び目を平面曲線(半仮想結び目という)で表す方法が開発された。

2. 研究の目的

以上のような背景から本研究の主たる目的は特異曲面結び目をダイアグラム表示の観点から研究し、その性質を明らかにすることである。大きく分けて次の3点について研究する。

(1)特異曲面結び目のダイアグラムのPN同値類による分類。

特異曲面結び目のダイアグラムは正則点、2重点、3重点、分岐点、ノードで構成され、曲面結び目のダイアグラムはノード以外で構成される。曲面結び目をダイアグラムで研究する上でローズマン変形と呼ばれる7種類の局所変形が重要となる。その理由は次の定理が成り立つからである：2つの曲面結び目が同値であるための必要十分条件はそれらのダイアグラムがローズマン変形の有限列で移り合うことである。一方、特異曲面結び目とそのダイアグラムを考えたとき、同様の定理を得るにはノードに関わる局所変形も必要となる。その候補としてPN変形(ノード通過変形、passing a node through a sheet)と呼ばれる局所変形がある。ノードに関わる変形はPN変形のみで十分であると予想されているが、同様の定理を証明するのは容易ではない。そこで2つの特異曲面結び目のダイアグラムがローズマン変形とPN変形の有限列で移り合うときそれらをPN同値と定義する。本研究の目的は特異曲面結び目のダイアグラムをPN同値類の観点で分類し、それを今後の特異曲面結び目の研究に利用することである。

(2)特異曲面結び目の3重点数およびPN3重点数の評価・決定。

特異曲面結び目Fの3重点数とは、Fと同値なすべての特異曲面結び目のダイアグラムについて、それらの3重点の個数の最小値のことである。FのPN3重点数とは、FのダイアグラムとPN同値なすべてのダイアグラムについて、それらの3重点の個数の最小値と定義する。一般に3重点数とPN3重点数は

一致するかどうかはわからない．特異曲面結び目がリボン・クラスプ型のときは3重点数とPN3重点数はともに0である．本研究では特異曲面結び目の3重点数およびPN3重点数の評価・決定を行う．

(3)特異曲面結び目を利用した結び目理論の未解決問題(無効交差予想)の解決．

結び目の交差交換によって結び目の性質がどのように変化するかについては様々な研究が行われている．無効な交差点で交差交換を行うと再び同じ結び目ができる．この逆の「交差交換を行って同じ結び目ができるときその交差点は無効である」は未解決問題であり，無効交差予想と呼ばれている．この予想は一部の結び目については解決しているが，完全解決には至っていない．動画法を用いるとノードの近傍は交差交換の時間経過の軌跡として表すことができるので，結び目の交差交換と特異曲面結び目には密接な関係がある．本研究では特異曲面結び目を利用して無効交差予想の解決に取り組む．

3．研究の方法

3つの研究目的(1)，(2)，(3)についての研究方法について記す．

(1)近年の結び目理論ではカンドルと呼ばれる代数系を利用した研究が発展している．カンドルとは群の共役の概念を拡張した代数系であり，結び目や曲面結び目と相性が良いことで知られている．1990年代後半に開発されたカンドルホモロジー理論において，3コサイクルを用いると結び目や曲面結び目の不変量(カンドルコサイクル不変量という)が得られる．当研究では，カンドルを用いてPN変形の下で不変な数量を構成し，それを利用して特異曲面結び目のダイアグラムのPN同値類による分類を行う．

(2)3重点数およびPN3重点数による特異曲面結び目の評価については，まず始めに，これらの値が小さい特異曲面結び目を特徴付ける．このとき，ダイアグラムの幾何的・代数的な性質を組み合わせることで特徴づけを行う．また，カンドルコサイクル不変量を用いると曲面結び目の3重点数を下から評価できることが知られている．この類似としてカンドルコサイクル不変量を用いて特異曲面結び目についても3重点数およびPN3重点数の下からの評価を行う．

(3)無効交差予想については素な結び目の場合を考えれば十分であることが知られている．そこで素な結び目の場合に特異曲面結び目を利用して無効交差予想の解決を試みる．予想が否定的だと仮定したときに矛盾を導きたい．その際，ノードを1つ持つ特異

球面結び目の「既約性」(あるいは「可約性」)に注目する．研究代表者のこれまでの研究で，特異球面結び目が可約であるためのカンドル彩色に関する必要条件を与えた．これを利用してこの問題に取り組む．

4．研究成果

当研究では次の2つの成果が得られた．

修正版カンドルホモロジー群の導入
特異球面結び目の3重点数に関する結果

カンドル3コサイクルがPN変形で不変となるようにカンドルホモロジー群を修正することができた．B. Audouxらの最近の結果により，2つの特異曲面結び目が同値であるための必要十分条件はそれらのダイアグラムがローズマン変形とPN変形の有限列で移り合うことが証明された．したがって，この修正版カンドルホモロジー群から得られるカンドルコサイクル不変量は特異曲面結び目の不変量となることがわかる．今後はこのカンドルコサイクル不変量を特異曲面結び目の3重点数の評価などに利用したい．

向き付け可能な特異曲面結び目の3重点数は1にはならないことを証明した．さらに，ノードを1個持つ特異球面結び目の3重点数は2または3にはならないことを証明した．証明方法は，曲面結び目のダイアグラムに関する研究手法を特異曲面結び目の場合に一般化することである．今後はこの研究手法をより発展させることで，特異曲面結び目のダイアグラムに関する研究を推し進めていきたい．当研究成果に関する論文は現在投稿中である

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計0件)

〔学会発表〕(計8件)

(1) 河村建吾，はめ込み球面結び目の3重点数について，学習院大学トポロジーセミナー2018年1月19日，学習院大学

(2) Kengo Kawamura，On triple point numbers of immersed surface-knots，国際研究集会「The 2nd Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications」，2017年11月13日，Busan Korea

(3) 河村建吾，はめ込み球面結び目の3重点数について，東京女子大学トポロジーセミナー，東京女子大学，2017年10月14日，東京

女子大学

(4) Kengo Kawamura, No immersed 2-knot with one self-intersection point has triple point number two or three, Friday Seminar on Knot Theory, Osaka City University, 2017年10月6日, 大阪市立大学

(5) 河村建吾, On triple point numbers of immersed surface-knots, 研究集会「拡大KOOKセミナー2017」, 2017年8月30日, 大阪工業大学

(6) 河村建吾, On diagrams of immersed 2-knots with one self-intersection point, 国際研究集会「The 9th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics」, 2017年7月26日, 大阪市立大学

(7) 河村建吾, 4次元空間にはめ込まれた曲面とカンドルホモロジー群について, 近畿大学数学教室講演会, 2016年12月9日, 近畿大学

(8) 河村建吾, Immersed surface-knots and quandle (co)homology groups, 研究集会「東北結び目セミナー2016」, 2016年10月16日, 東北大学

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河村 建吾 (KAWAMURA KENGO)

大阪市立大学・大学院理学研究科・数学研究所専任研究所員

研究者番号：00780727

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()