様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 11 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｈ０７２２９

研究課題名（和文）ラグランジュ平均曲率流とリッチフローの幾何解析

研究課題名（英文）Geometric analysis of Lagrangian mean curvature flows and Ricci flows

研究代表者
山本　光（Yamamoto, Hikaru）

東京理科大学・理学部第一部数学科・助教

研究者番号：５０７７８１７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：トロピカル多様体の余接束の格子商の中に特殊ラグランジュ部分多様体を構成する方法を考案した．また，そのフーリエ向井変換はミラーの中の複素部分多様体上にサポートを持つ変形エルミート・ヤン・ミルズ接続になるということを証明した．これに関してまとめた論文はMath. Z.から出版が確定した．
ピンチング条件を満たす自己縮小解の第二基本形式がある点でゼロになるならば，それは平面になるということを証明した．応用として，ユークリッド空間内のコンパクト余次元１平均曲率流が初期時刻でピンチング条件を満たすと仮定すると，一般I型特異点は全て特殊I型特異点であるということが証明できる．証明はRIMS講究録にまとめた．

研究成果の概要（英文）：I proposed a method to construct a special Lagrange submanifold in the lattice quotient of the tangential bundle of a tropical manifold. I also proved that the Fourier-Mukai transform of this special Lagrange submanifold is a deformed Hermitian Yang Mills connection with support on a complex submanifold in the mirror. A paper on these results will be published in Math. Z.
I proved that if the second fundamental form of a self-shrinker satisfying the pinching condition takes zero at some point, then it becomes a plane. As an application, if a codimension 1 mean curvature flow with initial pinching condition in Euclidean space develops finite time singularities, then all general type I singularities are actually special type I singularities. The proof is summarized in the RIMS Kokyuroku.

研究分野：Differential Geometry

キーワード：mean curvature flow　Lagrangian　special Lagrangian　Ricci flow　mirror symmetry　dHYM connection

１．研究開始当初の背景

特殊ラグランジュ部分多様体を獲得する方法としてラグランジュ平均曲率流が近年注目されている．特殊ラグランジュ部分多様体とはカラビヤウ多様体の中の極小なラグランジュ部分多様体のことである．特殊ラグランジュ部分多様体の大域的な具体例を構成することは難しい問題である．しかし（特殊とは限らない）ラグランジュ部分多様体を平均曲率流に沿って変形し，もしそのフローが長時間解と時間極限を持てば，それは特殊ラグランジュ部分多様体になる．

R.P. Thomas と S.-T. Yau の論文では特殊ラグランジュ部分多様体に収束するラグランジュ部分多様体は何らかの意味で「安定」なものに限るということが予想として提唱された．この予想「Thomas-Yau 予想」は数学的命題として厳密ではなく，示唆的な主張であった．しかし，近年 D. Joyce によりほぼ明文化された．Thomas-Yau 予想の真偽を確かめるための根本的な問題は多くある．

２．研究の目的

（１）ラグランジュ平均曲率流の具体例の構成：現状では，ラグランジュ平均曲率流の具体例はまだまだ少ない．その結果，ラグランジュ平均曲率流の動き方に関する正しい「直観」を養うことが難しい．また，具体例が少ないため，Thomas-Yau 予想の真偽を確認することもほぼ不可能である．特に特異点形成と位相変化を起こすラグランジュ平均曲率流の具体例は非常に少ない．

具体的には，外の空間がトロピカル多様体の接束および余接束の格子商によって構成されるカラビヤウ多様体の場合に具体例の構成に挑戦する．この空間の中で当該研究者の論文（Yamamoto, Tohoku Math. J.）と同様の方法でラグランジュ平均曲率流の具体例を構成することができるか？また、構成できた場合は、どのような特異点を形成するのか？位相変化は起きるか？を明らかにする．

（２）リッチフローにおいて発達している技術の平均曲率流への還元：現状では，一般のリーマン多様体の中を動く一般余次元の平均曲率流の解析の道具は不十分である．平均曲率流は「ユークリッド空間」の中を「余次元１」の部分多様体が動いている状況ならば，純粋に解析学の範疇で非常に多くの結果が証明できる．しかし「一般のリーマン多様体」の中を「一般余次元」の部分多様体が動いている状況では使える結果が激減する．

ラグランジュ平均曲率流は$2n$次元のリーマン多様体の中をn次元の部分多様体が動いている状況であるから当然この問題に直面する．当該研究者は，ラグランジュ平均曲率流の研究で必要になる技術は解析学の既存の結果から借りてくるのではなく，リッチフローの研究を参考に自ら開発する必要があると考えている．具体的にはリッチフローの場合に成立する性質で，平均曲率流に対しては未だに知られていない以下の問題に取り組む．

① self-shrinker は rigid か？（すなわち１点で平均曲率が消える self-shrinker は平面に限るか？）．
② 一般 I 型特異点は全て特殊 I 型特異点か？
③ 平均曲率流に対しても G. Perelman の pseudo locality theorem は成り立つか？

３．研究の方法

（１）ラグランジュ平均曲率流の具体例の構成：トロピカル多様体とは多様体であって局所座標の変換関数が必ず「整数係数」の正則行列の作用とユークリッド空間の平行移動という形で書ける特殊な多様体である．このような多様体の例は，非コンパクト（例えば局所座標で覆えない特異集合が存在するような）ならば無限個存在する．このような例を「特異トロピカル多様体」と呼ぶ．

特異トロピカル多様体はミラー対称性のトイモデルとして利用される．トロピカル多様体Bとその上の多価値凸関数が存在すると，Bの接束TBの部分格子束Λによる商$X(B):=TB/\Lambda$にカラビヤウ構造が入る．同様のことを余接束に行ったものを$Y(B)$と書くことにする．すると$Y(B)$にもカラビヤウ構造が入り，$X(B)$と$Y(B)$は互いにミラー多様体になる．またどちらもB上のトーラスファイバー束の全空間になっている．

すると$X(B)$やをトーリック多様体の類似物のように見ることができ,Bはトーリック多様体の場合のモーメントポリトープに相当するものだと思うことができる．このように見ることで，当該研究者がトーリック多様体の中で構成したラグランジュ平均曲率流の具体例（Yamamoto, Tohoku Math. J.）を$Y(B)$の中でも同様に構成することが可能なのではないかと考えている．

（２）① 平均曲率流の self-shrinker は rigid か？：リッチフローにおいても self-shrinker という概念がある．そしてリッチフローの場合は「スカラー曲率が１点でゼロになる self-shrinker はユークリッド空間しかない」ということが証明されている．これを（リッチフローの場合の）「self-shrinker の rigidity」と呼ぶ．この定理と他の定理を合わせることで（リッチフローの場合は）「一般 I 型特異点は全て特殊 I 型特異点である」ということが証明できる．

一方で平均曲率流にも self-shrinker と呼ばれる対象があるが，これに関しては rigidity，すなわち「一点で平均曲率が消える self-shrinker は平面に限るか？」ということは分かっていない．リッチフローの結果を参考にして，この問に（場合によっては条件を加え）肯定的な回答を与える．

（２）② 一般Ｉ型特異点は全て特殊Ｉ型特異

点か？：上で述べた通りこの命題はリッチフローの場合は既に証明されている．さらに，平均曲率流の場合もユークリッド空間内を余次元１の部分多様体が動いている場合は A. Stone によって肯定的に証明されている．従って証明する意味があるのは「一般のリーマン多様体の中を一般余次元の部分多様体が動いている場合」である．リッチフローの場合と Stone の方法を参考にすると，証明の大まかな流れは以下である．一般Ⅰ型特異点の中に特殊Ⅰ型特異点でないものがあったとすると，その特異点の近傍を無限大に拡大することで「一点で平均曲率がゼロになる self-shrinker」が得られる．ここで（２）① の「self-shrinker の rigidity」と「あと何か条件１つ」を使って「矛盾」を導く．従ってこの研究の鍵は矛盾を引き起こすための「条件」を見つけることである．

（２）③ 曲率流に対しても G. Perelman の pseudo locality theorem は成り立つか？：ユークリッド空間内の平均曲率流に対しては Le-Sesum が一般余次元の場合に（２）② に対して証明を与えている．その証明の鍵は Chen-Yin の「pseudo locality theorem」である．pseudo locality theorem とはある種のアプリオリ評価である．Chen-Yin の pseudo locality theorem はユークリッド空間内の平均曲率流に対してしか適用できない．従って，Chen-Yin の pseudo locality theorem を一般のリーマン多様体の中を動く平均曲率流に対して拡張することができれば，（２）① が証明できなくても，Le-Sesum のアプローチで（２）② が証明できる可能性がある．Chen-Yin の結果は Huisken によるユークリッド空間内の平均曲率流に対する単調性公式に基づいている．従ってまずは Huisken の単調性公式を一般のリーマン多様体の中を動く平均曲率流に拡張することから始める．

４．研究成果

（１）ラグランジュ平均曲率流の具体例の構成：目標は要約すると以下を明らかにすることであった．① $X(B)$と$Y(B)$をトロピカル多様体Bの接束と余接束の格子商とする．このとき当該研究者(Yamamoto, Tohoku Math. J.)がトーリック多様体の中にラグランジュ平均曲率流を構成したのと同様の方法で，$Y(B)$の中にラグランジュ平均曲率流を構成することができるか？②また，構成できた場合，そのミラーである $X(B)$の中にはどのようなフローができるか？

これに関して結論は以下である．目標①に関して，同様の方法は$Y(B)$の中でも機能することが分かった．しかし，その方法で$Y(B)$の中に構成されるラグランジュ部分多様体は全て特殊ラグランジュ部分多様体になるということが分かった．従って，平均曲率流で動かない解が得られたことになる．これはトーリック多様体とトロピカル多様体$Y(B)$は似ているが厳密には違う，ということの現れである．

さらに，上記で得られた$Y(B)$内の特殊ラグランジュ部分多様体内のミラー対応物は何か？ということについて研究を行った．東京大学（現清華大学）の二木昭人氏の紹介により Leung-Yau-Zaslow の仕事を知った．彼らは$Y(B)$の中の特殊ラグランジュ部分多様体Lがトーラス束の切断のグラフで書けている場合，Lを Fourier-Mukai 変換すると$X(B)$上の deformed Hermitian Yang Mills 接続になるということを証明した．これは上記の目標②と関係が深い．そこで，この論文を詳しく精査することで，特殊ラグランジュ部分多様体が「切断のグラフになっている」という仮定を弱めることができた．切断という条件を外した状態で得られるものは$X(B)$の中の複素部分多様体とその上の deformed Hermitian Yang Mills 接続になる．この結果に関してまとめた論文は Math. Z. から出版が確定している．

（２）① 平均曲率流の self-shrinker は rigid か？：これには Pigola-Rimoldi-Setti による縮小勾配リッチソリトンの rigidity の結果のアナロジーが機能した．結論として，（全ての自己縮小解ではないが）ピンチング条件を満たす平均曲率流の自己縮小解の rigidity を証明することができた．ここでピンチング条件とは，第二基本形式のノルムが平均曲率ベクトルのノルムの正定数倍で上から押さえられるという意味である．証明は平均曲率ベクトルのノルムの２乗が満たす楕円型の偏微分不等式に最大値原理を適用する．結論として，ピンチング条件を満たす自己縮小解の第二基本形式が１点以上でゼロになるならば，それは平面になるということが証明できる．この結果に関しては京都大学で行われた研究集会「部分多様体論の潮流」で発表し，証明は RIMS 講究録にまとめた．

（２）② 一般Ⅰ型特異点は全て特殊Ⅰ型特異点か？：これに関しては（２）① で述べた結果が応用できる．まず，以下が知られている．外の空間がユークリッド空間で，平均曲率流で動いている部分多様体の余次元が１ならば，初期条件に課したピンチング条件はその後の時間でも保たれる．証明は放物型の最大値原理である．この事実と（２）① で述べた結果に加えて，リッチフローの場合の Enders-Muller-Topping の議論を合わせると次のことが証明できる．コンパクトな余次元１の部分多様体がユークリッド空間内を平均曲率流に従って動いているとする．初期時刻でピンチング条件を満たし，フローは有限時刻でⅠ型特異点を形成するとする．この時，一般Ⅰ型特異点は全て特殊Ⅰ型特異点である．これは，当初から考えていた問いに対する，条件付きでの，肯定的な回答である．今のところ，この結果が一般の余次元でも正しいかは分かっていない．この結果はリッチフローの結果を平

均曲率流に移植することができた例である．この結果に関しても上記と同じ京都大学で行われた研究集会「部分多様体論の潮流」で発表し，証明はRIMS講究録にまとめた．

（２）③ 曲率流に対しても G. Perelman の pseudo locality theoremは成り立つか？：リッチフローに対する Perelman の pseudo locality theoremでは，単調量の局所化が本質的な役割を果たす．その時に使うのが，多様体上の固定した点からの距離関数である．リッチフローの場合はリーマン計量が時間と共に動いているので，この距離関数は時間と空間の両方の関数である．そこで，この距離関数に熱作用素を作用させる．すると，Perelmanの巧みなテクニックにより，熱作用素を作用させた後の関数の固定点から離れた場所での値を下から評価することができる．この補題を「距離関数に熱作用素を作用させた関数の遠いところでの評価」と呼ぶことにする．これがあるお陰で，pseudo locality theorem の背理法による証明が最後まで機能する．

従って，平均曲率流の pseudo locality theoremを出すためには，この「距離関数に熱作用素を作用させた関数の遠いところでの評価」を出さなければならない．部分多様体に導入できる自然な（擬）距離は２つある．一つは誘導距離．もう一つは外の空間の距離関数の制限である．平均曲率流に沿って部分多様体が動いている場合，どちらも時空の関数である．この２つの可能性に対して，Perelmanと同様の証明が機能するか？を調べた．まず誘導距離を使った場合．この場合は「距離関数に熱作用素を作用させた関数の遠いところでの評価」は出ない（厳密には少なくともPerelmanと同様の証明は機能しない）ということが分かった．次に外の空間の距離関数の制限の場合．この場合は，距離関数に熱作用素を作用させた関数の遠いところでの評価」は出る．しかし，別の問題が発生する．それは，この関数を使ってカットオフ関数を構成し，Huiskenの単調性公式を局所化すると，本当に注目したい点の周り以外の場所の情報も残ってしまうという現象である．これは外の空間の距離関数の制限を使ったデメリットである．この不具合を抱えたまま証明を前進させることは可能だが，今度は Point Picking Lemmaと組み合わせた時に手詰まりとなる．

従って，結論としては，現状ではPerelmanと同様にして平均曲率流に対する pseudo locality theoremを出すことはできなかった．以上のような困難があるということが分かっただけでも成果と言えるかもしれないが，今後のより深い研究が必要である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計３件）

① H. Yamamoto, Examples of Ricci-mean curvature flows, 査読有，J. Geom. Anal., 28(2018), no. 2, 983-1004. DOI: https://doi.org/10.1007/s12220-017-9851-y

② N. Koike and H. Yamamoto, Gauss maps of the Ricci-mean curvature flow, 査読有，Geom. Dedicata, 194(2018), no. 1, 169-185. DOI: https://doi.org/10.1007/s10711-017-0271-8

③ H. Yamamoto, Special Lagrangian and deformed Hermitian Yang-Mills on tropical manifold, to appear in Math. Z. DOI: https://doi.org/10.1007/s00209-018-2050-0

〔学会発表〕（計１１件）

① 山本光，2016年10月29日，リッチフローと平均曲率流の混合方程式について，Okayama Workshop on Partial Differential Equations，岡山大学

② 山本光，2016年11月04日，リッチ平均曲率流とその具体例について，福岡大学微分幾何研究会，福岡大学セミナーハウス

③ 山本光，2017年01月28日，On coupled flows with mean curvature flows and Ricci flows, Workshop on Analysis in Kagurazaka 2017，東京理科大学

④ 山本光，2017年03月28日，Ricci-mean curvature flows and its Gauss maps, The 13th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Geometry and Lie Theory, 大阪市立大学

⑤ 山本光，2017 年 04 月 21 日，Mean curvature flows in several ambient spaces and its monotonicity formulas, 首都大幾何学セミナー，首都大学東京

⑥ 山本光，2017年06月26日，平均曲率流の特異点について，部分多様体論の潮流，京都大学数理解析研究所

⑦ 山本光，2017年09月11日，特殊ラグランジュ部分多様体と変形エルミート・ヤン・ミルズ接続のミラー対応，日本数学会，山形大学

⑧ 山本光，2017年9月22日，LYZ ansatz on tropical manifolds, The Third Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry, Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), Spain, Madrid

⑨ 山本光，2017年11月05日，リッチ平均曲率流とそのガウス写像について，福岡大学微分幾何研究会，福岡大学セミナーハウス

⑩ 山本光，2017年11月25日，Ricci-mean curvature flows and its Gauss maps, Geometric flows and Related Problems, 東京工業大学

⑪ 山本光，2018 年 03 月 26 日，On

correspondence between special Lagrangian submanifolds and deformed Hermitian Yang-Mills connections, Geometry of Submanifolds and Integrable Systems, 大阪市立大学

６．研究組織

(1)研究代表者

山本　光 (YAMAMOTO, Hikaru)
東京理科大学・理学部第一部数学科・助教
研究者番号：５０７７８１７３