

平成 30 年 4 月 30 日現在

機関番号：32660

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2016～2017

課題番号：16H07230

研究課題名(和文) 接触構造の観点からみた正結び目の研究

研究課題名(英文) Study of positive knots via contact structures

研究代表者

田神 慶士 (Tagami, Keiji)

東京理科大学・理工学部数学科・助教

研究者番号：60778174

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：三次元ユークリッド空間に埋め込まれた円周を結び目という。標準的接触構造を備えた三次元ユークリッド空間のシンプレクティック化の中でラグランジアン曲面を下から張る結び目をラグランジアン充填可能な結び目という。本研究では、Hayden-Sabloffが証明した、正結び目はラグランジアン充填可能である、という結果をもとにラグランジアン充填可能性と結び目の正値性の関係を調べた。その主たる結果として、(1) ザイフェルトグラフに関してある条件をもつ概正結び目がラグランジアン充填可能であること(2) 交代結び目がラグランジアン充填可能であるならば正結び目であること、を示した。

研究成果の概要(英文)：A knot is a smooth embedding of a circle into the 3-dimensional Euclidean space. A knot is Lagrangian fillable if it bounds an oriented Lagrangian surface from below in the symplectisation of the standard contact structure of the 3-dimensional Euclidean space. Hayden and Sabloff proved that any positive knot is Lagrangian fillable. Inspired by their work, in this study, I investigated relations between the Lagrangian fillability and the positivity of knots. As a result, I proved that (1) any almost positive knot with a certain condition on its Seifert graph is Lagrangian fillable, (2) any alternating and Lagrangian fillable knot is positive.

研究分野：位相幾何学

キーワード：結び目 正結び目 接触構造 ラグランジアン充填

1. 研究開始当初の背景

三次元ユークリッド空間に埋め込まれた円周を結び目という。結び目を二次元ユークリッド空間に射影してできる像を結び目図式という。結び目図式にはいくつかの交点が見れるが、そのすべての交点が正交点と呼ばれる交点になっているときにその結び目図式を正結び目図式という。また、正結び目図式を持つ結び目を正結び目という。

Hayden-Sabloff ([1])により、正結び目が標準的接触構造を備えた三次元ユークリッド空間のシンプレクティック化の中でラグランジアン曲面を下から張ることが示されている。このように、ラグランジアン曲面を張る結び目をラグランジアン充填可能な結び目という。また、ラグランジアン充填可能である結び目は擬正結び目という、ある種の正值性を備えた結び目であることが彼らによって指摘されている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、ラグランジアン充填可能性あるいは、より広く接触構造の観点から正結び目とそれに関連する結び目の幾何学的性質を探ることである。特に以下の点に着目して研究を行った。

- (1) 唯一つだけ正交点でない交点をもつ結び目の図式を概正結び目図式という。概正結び目図式をもつが正結び目図式を持たない結び目を概正結び目という。概正結び目は非常に正結び目に似ているため、ラグランジアン充填可能であることが期待される。そこで概正結び目について、そのラグランジアン充填可能性を探る。
- (2) ラグランジアン充填可能性と強擬正性は互いに独立した性質であることが Hayden-Sabloff ([1])により示されている。この二つの性質を同時に満たす結び目の典型的な例は正結び目であるが、それ以外に存在するか、また存在するならばどのような結び目か調べる。
- (3) 正結び目は等質結び目でもある。そこで、等質結び目がラグランジアン充填可能か調べる。また、それ以外の結び目のクラスとラグランジアン充填可能性の関係についても記述する。

3. 研究の方法

与えられた結び目がラグランジアン充填可能であるための必要条件として、次の二つが知られている：

- (a) ラグランジアン充填可能な結び目は擬正結び目である。
- (b) exact ラグランジアン充填可能な結び目 K の最大サーストン・ベネカン数 $TB(K)$ がホムフリー多項式 $P_K(v, z)$ の v -変数に関する最大次数と本質的に同じとなる。特に、次の等式を満たす：

$$TB(K) = -deg_v P_K(v, z) - 1$$

(ここで exact とはラグランジアン充填に制限したシンプレクティック形式に関するある解析的な条件である。ここでは詳細は割愛する)。

さらに、Hayden-Sabloff ([1])はこの二つの必要条件が十分条件であることを予想している(厳密には彼らは exact 性を仮定していなかったが、彼らの考察では Ekholm-Honda-Kálmán ([2])の論文を引用しており、そこでは exact 性を仮定しているため、暗黙のうちに exact 性を仮定していると考えられる)。

このことを踏まえ、次の手順で研究を進めた：

- (1) ラグランジアン充填可能性を調べたい結び目について、(a) (b)の条件を確かめる。特に、その結び目がラグランジアン充填可能ならば、最大サーストン・ベネカン数を実現するルジャンドル表示のフロント射影から次の(2)の方法で具体的にラグランジアン充填を構成できる可能性があるため、そのようなフロント射影を見つけることが最も重要となる。
- (2) (a) (b)を満たす結び目について、具体的にラグランジアン充填を与える。特に、Ekholm-Honda-Kálmán ([2])のハンドルの貼り付け操作を用いて構成する。この操作によって得られるラグランジアン充填はすべて exact 性を持つ。

4. 研究成果

研究成果として以下の結果を得た：

- (1) ザイフェルトグラフに関して次の条件(*)を満たす概正結び目についてラグランジアン充填可能であることを示した。

(*)負の辺によって結ばれる二つの頂点がある正の辺によって結ばれる。

その応用として、強擬正かつラグランジアン充填可能な結び目で正結び目でないものを無限個与えた。また、概

正結び目が擬正結び目であるかどうかは未解決問題であるが、この結果と「3. 研究の方法(a)」を用いることにより、条件(*)を満たす場合に限り、この未解決問題を肯定的に解決することができた。

この条件(*)は研究代表者が過去に行った概正結び目のラスムッセン不変量に関する研究([3])や Stoimenow ([4])による概正結び目の結び目種数に関する研究でも現れた条件であり、概正結び目の性質がこの条件の有無で変化することが知られている。今回のこの結果もまた条件(*)の重要性を支持するものとなっている。

一方で、条件(*)を満たさない概正結び目が存在することが知られており、すべての概正結び目についてラグランジアン充填可能かどうかは判定できていない。しかしながら、現在知られているすべての概正結び目について、ラグランジアン充填可能であるための必要条件「3. 研究の方法(a)(b)」が成り立つことがわかっている。

(2) 等質結び目の典型的な例である交代結び目については、ラグランジアン充填可能な結び目であることと正結び目であることが等価であることを示すことができた。証明には

(i) 交代結び目 K の最大サー斯顿・ベネカン数 $TB(K)$ が最小負交点数 c_- と結び目符号数 $\sigma(K)$ を用いて

$$TB(K) = -c_- - \sigma(K) - 1$$

と表示できること、

(ii) 交代結び目 K の結び目符号数 $\sigma(K)$ がラスムッセン不変量 $s(K)$ を用いて

$$\sigma(K) = -s(K)$$

と表示できること、

(iii) ラグランジアン充填可能な結び目 K の最大サー斯顿・ベネカン数 $TB(K)$ がラスムッセン不変量 $s(K)$ を用いて

$$TB(K) = s(K) - 1$$

と表示できること、

を用いている。上記(i)-(ii)は等質結

び目では成り立たないため、この結果をこの方法を用いて等質結び目に拡張することはできなかった。

後に、同様の結果が既に Cornwell-Ng-Sivek ([5]) によって証明されていたことが判明した。研究代表者の結果は彼らの結果の別証明となっている。

また、この結果を用いて最小交点数が10以下のすべての結び目についてラグランジアン充填可能性を決定した。

(3) 上の(1)(2)以外にはラグランジアン充填可能な結び目のクラスや性質は得られなかったが、ディバイド結び目と呼ばれる結び目がラグランジアン充填可能であるための必要条件「3. 研究の方法(a)(b)」を満たすことが既に示されていることがわかった。もしも、ディバイド結び目がラグランジアン充填可能な結び目であるならば、最大サー斯顿・ベネカン数を実現するルジャンドル表示のフロント射影から具体的にラグランジアン充填を構成できる可能性が高い。ディバイド結び目の最大サー斯顿・ベネカン数は Ishikawa ([6]) により計算されているがそのルジャンドル表示のフロント射影は知られていないため、そのような表示を求めることが、今後の課題として残されている。

<引用文献>

- [1] K. Hayden and J. M. Sabloff, *Positive knots and Lagrangian fillability*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 4, 1813-1821.
- [2] T. Ekholm, K. Honda, and T. K alman, *Legendrian knots and exact Lagrangian cobordisms*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **18** (2016), no. 11, 2627-2689.
- [3] K. Tagami, *The Rasmussen invariant, four-genus and three-genus of an almost positive knot are equal*, Canad. Math. Bull. **57** (2014), no. 2, 431-438.
- [4] A. Stoimenow, *On polynomials and surfaces of variously positive links*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **7** (2005), no. 4, 477-509.
- [5] C. Cornwell, L. Ng, and S. Sivek, *Obstructions to Lagrangian concordance*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), no. 2, 797-824.
- [6] M. Ishikawa, *On the Thurston-Bennequin invariant of graph divide links*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **139** (2005), no. 3, 487-495.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① Tetsuya Abe and Keiji Tagami,
Characterization of Positive
Links and s-invariant for links,
Canadian Journal of Mathematics,
69, 2017, pp.1201-1218
DOI: 10.4153/CJM-2016-030-7

[学会発表] (計 1 件)

- ① 田神慶士, 結び目とラグランジア
ン充填, 関東若手幾何セミナー,
2017年

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等
(プレプリント)

K. Tagami, On the Lagrangian fillability
of almost positive links,
arXiv:1709.08834
<https://arxiv.org/abs/1709.08834>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田神 慶士 (Tagami Keiji)
東京理科大学・理工学部数学科・助教
研究者番号: 60778174

(2) 研究分担者

なし ()

(3) 連携研究者

なし ()

(4) 研究協力者

なし ()