

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年9月12日現在

機関番号：32682

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2016～2017

課題番号：16H07288

研究課題名(和文)非線形波動方程式における爆発境界の数学・数値解析

研究課題名(英文)Mathematical and Numerical analysis for nonlinear wave equations

研究代表者

佐々木 多希子 (Sasaki, Takiko)

明治大学・理工学部・助教

研究者番号：30780150

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,610,000円

研究成果の概要(和文)：(1)数値解析：様々な波動方程式に対して爆発境界の近似を提案し、非線形波動方程式系や消散型波動方程式の爆発境界のシミュレーションし、滑らかな爆発境界や特異性を持つ爆発境界が存在することを数値的に確認した。

(2)数学解析：ある未知関数の導関数を含む非線形波動方程式系の初期値が十分滑らかで大きいとき、爆発境界が連続微分可能になることを示した。また、ある未知関数の導関数を含む非線形波動方程式に対し、ある初期条件のもとで波動方程式の解がある常微分方程式の解に収束するとき、爆発境界も常微分方程式の爆発時間に収束することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、非線形波動方程式の爆発境界の解析という問題に対して、関数解析的手法と数値解析的手法の両方の側面からアプローチすることに意義があると言える。放物型方程式ではこのような研究は珍しくないが、双曲型方程式の場合、数値解析自体があまり進んでいないため、このようなアプローチはほとんど存在しなかった。単純な波動方程式でもその爆発境界は様々なものが存在し得る。また、離散問題の解析自体がもとの方程式の解析に役立つことも期待される。このアプローチにより、双曲型方程式においても数値解析を取り入れた研究が活性化し、爆発問題のみならず双曲型方程式の数学解析全体に大きく貢献することが期待される。

研究成果の概要(英文)：(1) Numerical Analysis : We considered some numerical schemes for the blow-up curve of some nonlinear wave equations. By using them, we numerically confirmed the regularities and singularities of the blow-up curve for some nonlinear wave equations. (2) Mathematical Analysis : We showed that the blow-up curve for a system of the nonlinear wave equations becomes smooth if the initial value is large and smooth enough. Moreover, we showed that the blow-up curve converges to the blow-up time of an ordinary differential equation if the solution of the wave equation converges to the solution of the ordinary differential equation.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：波動方程式 爆発現象 数値シミュレーション

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

非線形発展方程式における研究課題の一つに解の爆発がある。解が爆発(ある時刻で、方程式の解の適当なノルムが発散する)場合、「どのような場合に解が爆発するのか」、「爆発するとき、解はどのようにふるまうのか」、「いつ、どこで爆発するのか」などの観点から問題が提起されており、多くの発展方程式においてこの問題は重要な課題である。しかしながら、解の爆発現象の数学的な解析は非常に難しい場合が多く、未解決な問題が多く残されている。その一つが非線形波動方程式の爆発境界である。 x を空間変数、 t を時間変数とし、非線形波動方程式

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = F(u, \partial_t u, \partial_x u), x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

を考える。このとき、爆発境界とは次で定義される Γ のことである。

$$\Gamma = \{(x, T(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

ただし、 $T(x) = \sup\{t \in (0, \infty) \mid |u(x, t)| < \infty\}$ である。波動方程式の解がいつどこで爆発するのか、さらに、 T がどのような関数になるのか(微分可能か、特異性を持つのかなど)が解決すべき課題である。 $F = |u|^p (p > 1)$ である場合に、初期値を十分滑らかに、かつ大きく取ると T が C^1 surface になることが示されていた。他にも何人かの研究者により、爆発境界の研究がなされているが、非線形項 F に未知関数の導関数が入った波動方程式に適用することはできなかった。したがって、爆発境界の微分可能性などの性質が、非線形項にある程度依存せずに成り立つ一般的なものなのか、 $F = |u|^p$ の場合に限った、特殊な性質なのかは分かっていなかった。

次に、解の爆発における数値解析の研究背景について述べる。爆発境界は前述の通り、複雑な問題である場合が多いが、数値シミュレーションを用いれば容易にその観察をすることができる。しかし、解のノルムが無限大に発散する現象は、有限の計算しかできないコンピュータでは非常に扱いづらい問題である。したがって、数値シミュレーションするには、シミュレーション結果が爆発を再現していることが数学的に保証されている手法を用いることが非常に大切である。 $F = |u|^p$ である波動方程式に対しては、爆発境界の近似の提案されており、その収束性も示されている。

2. 研究の目的

$F = (\partial_t u)^2 - (\partial_x u)^2$ である場合に、 $F = |u|^p$ の場合では示されなかった、 Γ が一点になる例や、 C^∞ surface になる場合があることが示されている。このように、非線形項 F に微分が入ると、一般には単純な波動方程式でも様々な爆発境界を持つ可能性があるため、一般的な枠組みで爆発境界を解析することは難しい。本研究では、様々な波動方程式(F に未知関数の導関数を含む波動方程式、伝播速度が異なる波動方程式系など)の爆発境界 T の微分可能性や特異性などに着目し、これらを数値的・数学的に解析し、爆発境界の性質を統一的に扱う一貫した理論を構築することを目的とする。

3. 研究の方法

非線形波動方程式の爆発境界の問題は、まだ多くの波動方程式においては明らかではない。 F に未知関数の導関数を含む波動方程式、伝播速度が異なる波動方程式系や多次元の波動方程式、また消散型波動方程式などの爆発境界の形状の解明は重要な課題である。本研究ではこれらの波動方程式の爆発境界を対象に、数値シミュレーションをし、またその結果をもとに、爆発境界の微分可能性や特異性などの数学解析を行う。その成果をもとに、様々な波動方程式の爆発

境界の性質を統一的に扱う一貫した理論を構築する。

4. 研究成果

1. 爆発境界の数値シミュレーション

$F = |u|^p$ である波動方程式に対して、爆発境界の近似を応用し、非線形波動方程式系や消散型波動方程式の爆発境界の数値シミュレーションし、ある初期条件のもとで、滑らかな爆発境界や特異性を持つ爆発境界が存在することを数値的に確認した。

2. 爆発境界の微分可能性について

ある未知関数の導関数を含む非線形項を持つ波動方程式系の初期値が十分滑らかで大きいとき、爆発境界が連続微分可能になることを示した。この結果や解析手法をもとにし、パリ第13大学の Hatem Zaag 氏と共同研究を開始し、準線形波動方程式や Dirac 方程式の爆発境界の研究を開始した。

3. 常微分方程式への収束について

ある未知関数の導関数を含む非線形波動方程式に対し、ある初期条件のもとで、波動方程式の解がある常微分方程式の解に収束するとき、爆発境界も常微分方程式の爆発時間に収束することを示した。

4. 爆発境界の特異性について

ある未知関数の導関数を含む非線形項を持つ波動方程式の解に制限を課した際に、ある初期条件のもとで爆発境界が特異性を持つことを証明した。

爆発境界を統一的に扱う理論の構築は、特異性などの考察に予想以上に時間を要しているため、現在遂行中である。今後、この作業を急ぐ。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 2 件)

- (1) Takiko Sasaki, Regularity and singularity of the blow-up curve for a wave equation with a derivative nonlinearity, *Advances in Differential Equations* 23 (2018), 373-408 (査読有).
- (2) 佐々木多希子, 石渡哲哉, 1次元非線形波動方程式の爆発曲線に関する数値・数学解析, 数理解析研究所講究録 2094, (2018), 26-35 (査読無).

[学会発表](計 23 件)

- (1) Takiko Sasaki, The blow-up curve of solutions for semilinear wave equations with Dirichlet boundary conditions in one space dimension, Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations Japan-China Joint Project for Young Mathematicians 2018, 2018年11月, 龍谷大学
- (2) 佐々木多希子, 1次元非線形波動方程式の爆発曲線に関する数値・数学解析, 東工大数理解析セミナー, 2018年7月, 東京工業大学
- (3) Takiko Sasaki, The blow-up curve of solutions for semilinear wave equations with Dirichlet boundary conditions in one space dimension, The 11th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute "The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations, 2018年7月, 北海道大学

- (4) Takiko Sasaki, The blow-up curve of solutions for semilinear wave equations with Dirichlet boundary conditions in one space dimension, The Seventh China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, 2018年8月, Shiinoki Cultural Complex
- (5) Takiko Sasaki, The blow-up curve for semilinear wave equations with small spatial velocity, International Conference Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2018, 2018年7月, Hotel Notokinpura
- (6) Takiko Sasaki, Numerical and mathematical analysis for the blow-up curve of solutions to 1-dimensional nonlinear wave equations, East Asia section of SIAM 2018, 2018年6月, 東京大学
- (7) Takiko Sasaki, Error analysis of splitting methods for semilinear evolution equations, Pan-American Workshop 2018, 2018年6月, Varadero Convention Center
- (8) 佐々木多希子, The blow-up curve for semilinear wave equations with small spatial velocity, 日本数学会 2018年度秋季総合分科会, 2018年9月, 岡山大学
- (9) 佐々木多希子, Numerical and mathematical analysis for the blow-up curve of solutions to 1-dimensional nonlinear wave equations, 若手のための偏微分方程式と数学解析, 2018年2月, 福岡大学
- (10) 佐々木多希子, ディリクレ境界条件を課した非線形波動方程式の爆発曲線について, 軽井沢グラフと解析研究集会, 2018年2月, 日本大学 軽井沢研修所
- (11) 佐々木多希子, 1次元非線形波動方程式の爆発曲線に関する数値・数学解析, 量子渦と非線形波動, 2018年1月, 東京理科大学
- (12) 佐々木多希子, 非線形項に未知関数の導関数を含む波動方程式の爆発曲線について, 弘前非線形方程式研究会, 2017年12月, 弘前大学
- (13) 佐々木多希子, 1次元非線形波動方程式の爆発曲線に関する数値・数学解析, RIMS 共同研究(公開型) 数値解析学の最前線, 2017年11月, 京都大学
- (14) 佐々木多希子, The blow-up curve of the radially symmetric solutions to nonlinear wave equations, Seminar on Nonlinear Wave Equations in Hakodate, 2017年8月, はこだて未来大学
- (15) 佐々木多希子, The blow-up curve of solutions for a system of nonlinear wave equations, 神楽坂解析セミナー, 2017年7月, 東京理科大学
- (16) 佐々木多希子, Regularity and singularity of the blow-up curve for a nonlinear wave equation with a derivative nonlinearity, 明治非線型数理セミナー, 2017年5月, 明治大学
- (17) Takiko Sasaki, Regularity and singularity of the blow-up curve for a nonlinear wave equation, Equadiff 2017, Equadiff 2017, 2017年7月, Slovak University of Technology
- (18) Takiko Sasaki, Finite Difference Approximation for Nonlinear Schrodinger Equations with Application to Blow-up Computation, The Third International Conference on Engineering and Computational Mathematics, 2017年5月, The Hong Kong Polytechnic University
- (19) 佐々木多希子, 1次元非線形波動方程式の爆発曲線に関する数値・数学解析, 日本数学会 2018年度年会, 2018年3月, 東京大学
- (20) 佐々木多希子, 1次元非線形波動方程式の爆発曲線に関する数値・数学解析, 数学と現象 in

清里, 2018年2月, 明治大学

(21) 佐々木多希子, 1次元非線形波動方程式の爆発曲線に関する数値・数学解析, 応用数学合同研究集会, 2017年12月, 龍谷大学

(22) 佐々木多希子, 非線形波動方程式系の爆発曲線について, 日本数学会 2017年度秋季総合分科会, 2017年9月, 山形大学

(23) 佐々木多希子, 非線形波動方程式の球対称解の爆発曲線について, 界面現象の数理・モデリング研究合宿 2017, 2017年6月, いするの家 西原脩三記念館

6. 研究組織

該当なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。