2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 ２４ 日現在

機関番号：１１２０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：１６Ｋ００００２

研究課題名（和文）列挙問題の難しさ解明に基づいた超高速列挙アルゴリズムの開発

研究課題名（英文）Designing Efficient Enumeration Algorithms Based on Analyzing Hardness of Enumeration Problems

研究代表者

山中　克久（Yamanaka, Katsuhisa）

岩手大学・理工学部・助教

研究者番号：６０５０８８３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，いくつかの列挙アルゴリズムを構築することに成功した．具体的には，辺連結度の高い部分グラフの列挙，包含多角形の列挙，柱付きフロアプランの列挙，阿弥陀籤(互換のポセット)の列挙に関して，列挙アルゴリズムを構築した．また，遷移問題に関していくつかの研究成果を得た．グラフ上の誘導木の遷移問題，トークン整列問題に関して，それぞれ計算困難性を含む研究成果を得た．その他，独立点集合を一般化した離散構造（距離3独立点集合）に対して，指数時間厳密アルゴリズムを構築することに成功した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
高速な列挙アルゴリズムを多数設計することに成功した．とくに柱付きフロアプランに関しては，１つあたりに必要な計算時間がO(1)時間となっており，理論的にはこれ以上改善できないほど高速な列挙アルゴリズムになっている．よって，学術的に意義のある研究成果の一つであると考える．この他，遷移問題に関して，いくつかの困難性を示すとともに，多項式時間可解性や，固定パラメータ容易性を示しており，難しさを示すのみにとどまらず，限定的な問題設定では，その問題を解けることも示せたという意味で学術的に意義のあるものであると考える．

研究成果の概要（英文）：In this research project, we designed enumeration algorithms for highly-edge-connected subgraphs of an input graph, surrounding polygons, floorplans with columns, and ladder lotteries (poset of transpositions).
We investigated the computational complexity of reconfiguration problems for induced tree and token-swapping problems. Besides, we gave an exact exponential algorithm for finding a maximum distance-3 independent set, which is a kind of a generalization of independent sets

研究分野：アルゴリズム理論

キーワード：列挙アルゴリズム

１．研究開始当初の背景

指定した条件を満たすものを全て探し出すことを列挙という．指定した条件を満たすものを列挙することでビッグデータから有用な情報を取り出すという研究が盛んに行われているため，ビッグデータの規模に耐えうる高速な列挙アルゴリズムが求められている．近年，高速な列挙アルゴリズムが提案されつつあるが，社会的なニーズが高いにも関わらず高速列挙アルゴリズムが提案されていない問題も数多く存在する．本研究ではまず，列挙問題の難しさの本質を解き明かすことでどのような方針で列挙アルゴリズムを設計すべきかの指針を与える．そして，適切な指針に基づいてアルゴリズムを設計することで，超高速列挙アルゴリズムを構築し，ビッグデータ解析の基盤技術を確立する．

２．研究の目的

本研究の目的の 1 つは，超高速列挙アルゴリズムを開発することである．列挙アルゴリズムにおいて，アルゴリズムの性能は，アルゴリズム全体の計算時間ではなく，列挙対象１つ当たりに必要な計算時間である．本研究では，列挙対象 1 つ当りの計算時間が高速なアルゴリズム設計することを目標とする．また．この目的を達成ために，様々な列挙問題を，遷移問題の計算量の観点から深く考察し，高速列挙アルゴリズムを設計するための知見を創出する．

３．研究の方法

本研究では，2 つのアプローチから研究を遂行する．(1)アルゴリズム理論からのアプローチ: 列挙アルゴリズムにはいくつかのアルゴリズム設計技法が知られている．例えば，分割法や逆探索法である．本研究では，取り扱う列挙問題を深く考察し，適切な技法に基づいて高速な列挙アルゴリズムを設計する．とくに，取り扱う列挙問題としては，グラフに関する列挙問題に注力する．(2) 計算量理論からのアプローチ: 様々な組合せ最適化問題に対しては，NP 困難に代表される困難性が示されているが，現在のところ，列挙問題に対して困難性を考える研究は殆ど存在していない．本研究では，計算量理論分野で精錬されてきた「困難性を示す技術」を活用して列挙問題を新たな視点から考察する．列挙問題におけるアルゴリズム設計技法として Avis と Fukuda によって提案された「逆探索法」がある．このアルゴリズム設計技法は非常に強力で，様々な列挙問題に対して高速なアルゴリズムが設計できることが実証されてきた．しかしながら，逆探索法を用いても高速なアルゴリズムを設計できていない問題も存在する．なぜ，そのような問題に対しては逆探索法によるアルゴリズムが設計できないのだろうか？逆探索法による列挙では，列挙対象を頂点とし，互いに関係がある 列挙対象同士を辺で繋いで得られるグラフ上で全域木を定義し，その全域木を探索することで列挙を行う．よく似た概念として解の遷移性がある．本研究では解の遷移性に着目し，遷移問題に対して計算量理論の立場からの知見を与える．

４．研究成果

研究テーマ別に記載する．はじめに列挙アルゴリズムについて述べる．列挙アルゴリズムに関しては，以下の列挙アルゴリズムを設計することに成功した．

(1)辺連結度の高い全域部分グラフの列挙： グラフ G が与えられたとする．G から k-1 本の辺を除去しても G が連結なままであるならば，G は k 辺連結であるという．辺連結度はネットワークの信頼度を保証する尺度として古くから認知されている．とくに道路ネットワークにおいてネットワークの信頼性は重要である．なぜならば，災害時においては，利用できなくなる道路が多数発生するからである．現在地から避難所への経路を複数確保することで災害時における安全性を担保することができる．そのようなことを実現する際に，辺連結性の考えを活用できる可能性がある．本研究では，グラフが与えられたとき k 辺連結全域部分グラフを列挙するアルゴリズムを与えた．とくに，入力グラフが平面グラフであるとき，2 辺連結全域部分グラフを１つあたり線形時間で列挙するアルゴリズムを与えた．平面グラフは，道路ネットワークのモデルとして捉えられるため応用的な観点から重要なグラフのクラスである．

(2)包含多角形の列挙： ２次元上の点集合が与えられたとき，すべての点を通るような単純多角形を simple polygonization という．Simple polygonization は計算幾何学において興味深い研究対象として知られており，simple polygonization の数え上げやランダム生成は古くから研究されてきている．また，simple polygonization の列挙は，未解決問題として知られている．本研究では，simple polygonization を列挙する足がかりとして，simple polygonization の定義を緩め，すべての点を内側に含む単純多角形(包含多角形)を列挙するアルゴリズムを与えた．計算時間は多角形１つあたり $O(n^2 \log n)$時間である．ここで，n は点の個数である．

(3)柱付きフロアプランの列挙： ２次元上に，矩形 R と R に含まれる点集合が与えられたとする．

R 中の点を通るような水平線分または垂直線分を使って R を小矩形に分割するパターンを列挙するアルゴリズムを与えた．このパターンは，部屋割りに対応する．矩形 R が部屋，R 中の点が柱，水平線分または垂直線分は部屋の壁に対応する．すべての柱が壁に埋め込まれるような部屋割りを列挙しているのが本研究である．柱付きフロアプランの列挙は，１つあたり $O(\log n)$時間で列挙するアルゴリズムが知られていたが，本研究では，それを改善し，１つあたり $O(1)$時間で列挙するアルゴリズムを構築することに成功した．ここで，n は与えられた点集合の要素数である．本アルゴリズムは図１に示す木構造を利用して高速な列挙アルゴリズムを実現している．

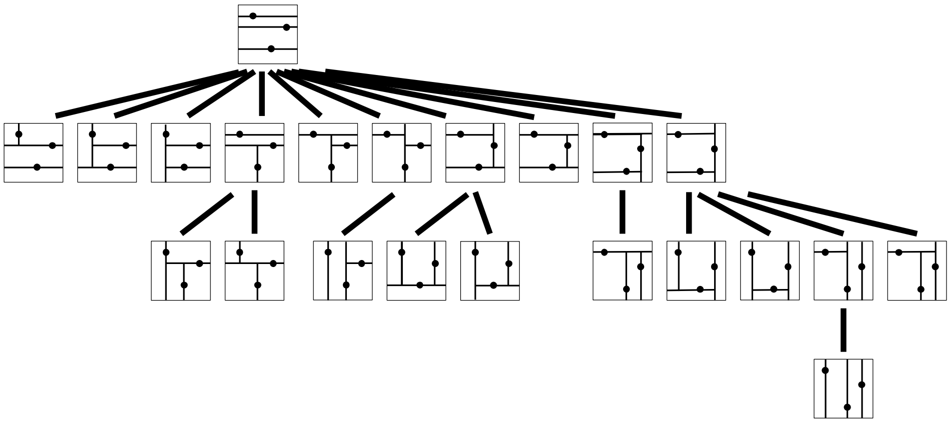

図 1: 柱付きフロアプランの木構造

(4)あみだくじの列挙，数え上げ，ランダム生成：置換が与えられたとき，その置換に対するあみだくじを高速に列挙アルゴリズムはすでに知られているが，本研究では，縦線の本数と横線の本数を指定したときに，指定した本数の縦線と横線をもつあみだくじを列挙するアルゴリズムを与えた．縦線の本数を n，横線の本数を m としたとき，あみだくじを $O(n+m)$時間で列挙することができる． さらに，ここで利用した構造を利用することで，あみだくじの数え上げとランダム生成を行うアルゴリズムを設計することに成功した.設計した数え上げアルゴリズムは $O(nb^3)$時間であみだくじの個数を求めることができる．この数え上げアルゴリズムを利用することでランダム生成ができることを示した．設計したランダム生成アルゴリズムは，$O(nb^3)$時間の前処理のあと，１つあたり $O(n+m)$時間であみだくじを一様ランダムに生成することができる．

次に遷移問題に関する研究成果について述べる．

(5)誘導木の遷移問題：グラフ中の誘導木を列挙する研究が知られており，例えば，近年では，縮退グラフ上で誘導木を列挙するアルゴリズムが報告された[Wasa，Arimura，Uno，ISAAC2014]．本研究では，グラフ中の誘導木に対する遷移問題を計算量理論の立場から考察した．誘導木遷移問題は，入力としてグラフ G と G 中の２つの誘導木 T_1 と T_2 が与えられたとき，T_1 と T_2 の間に遷移列があるかどうかを問う問題である.遷移のルールとしては,Token jump(頂点の交換)と Token slide(隣接する点と頂点を交換)を採用している．本研究では 3 つの研究成果を得ることができた．得られた研究成果は以下の通りである．誘導木遷移問題は，

- 入力グラフの最大次数が制限されていたとしても PSPACE 完全である，
- 誘導木の頂点数と遷移列長の両方が制限されていたとしても W[1]困難である，
- 誘導木の頂点数と最大次数が制限されていれば FPT である．

(6)トークン整列問題：遷移問題の一種としてトークン整列問題が知られている．入力としてグラフ G が与えられる．G の頂点にはラベル付きのトークンが配置されている．トークンの初期配置と最終配置が与えられたときに，隣り合う頂点上の 2 つのトークンを交換することを繰り返して最終配置を得るためには，何回の交換が必要だろうか?この遷移問題に対して，困難性を示すとともに，限定した問題設定に対してではあるが高速なアルゴリズムを与えた．本研究において，トークンのラベルが 3 種類以上であれば，トークン整列問題は NP 完全であることを示した．一方，トークンのラベルが 2 種類であれば，この問題を多項式時間で解けること示した．これは，トークンのラベル数に対する境界を示すことに成功しており，計算量理論的に興味深い結果を得ることができた．また，同じくトークンのラベル数が 2 であり，かつ，グラフのクラスが木に限定されていれば，線形時間で本問題を解くことができることを示した．トークン整列問題の変種として逐次的トークン整列問題についても，いくつかの研究成果を得た．トークン整列問題では，任意の隣り合う 2 頂点に着目してトークンを交換していたが，逐次的トークン整列問題では，最初にトークンを一つ選び，選んだトークンと隣接する他のトークンを交換することを繰り返す．これは，古典的なパズルである 15 パズルの変種になっている．この逐次的トークン整列

問題に対して近似困難性を示すとともに，グラフクラスを限定した場合の多項式時間可解性を示した．具体的には，グラフクラスを木，完全グラフ，サイクルに限定した場合であれば多項式時間で逐次的トークン整列問題を解くことができる．

その他，列挙アルゴリズム設計技法における分割法(ブランチングアルゴリズム)をベースにして指数時間厳密アルゴリズムを設計することができた．

(7)距離 3 独立点集合の指数時間厳密アルゴリズム：グラフの独立点集合とは，互いに隣り合わない頂点の部分集合のことである．グラフが与えられたとき，頂点数が最大の独立点集合を求める問題は，最も古典的な NP 困難問題の１つである．本研究では，独立点集合の一般化問題として距離 d 独立点集合問題を考える．距離 d 独立点集合とは，互いに距離が d 以上離れている頂点の集合である．よって，d=2 のときは，通常の独立点集合と同じである．したがって，要素数が最大の距離 d 独立点集合を求める問題は NP 困難であることが分かる．さらに，d=3 に限定したとしても，要素数が最大の距離 d 独立点集合を求める問題は NP 困難であることも知られており，いくつかの多項式時間近似アルゴリズムが提案されている．本研究では，近似ではなく，厳密に最大の距離 3 独立点集合を求める指数時間アルゴリズムを提案した．単に，しらみ潰し法で探索した場合，$O(2^n)$の計算時間が必要になってしまうが，提案したアルゴリズムは，ブランチングアルゴリズムに基づいて無駄な探索を省いているため，計算時間は $O(1.414^n)$時間に抑えられている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計７件）

1. Katsuhisa Yamanaka, Yasuko Matsui, and Shinichi Nakano, Enumerating highly-edge-connected spanning subgraphs, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, accepted.
2. Kunihiro Wasa, Katsuhisa Yamanaka, and Hiroki Arimura, The complexity of induced tree reconfiguration problems, IEICE Transactions on Information and Systems,査読有, vol.E102-D, no.3, 2019, pp.464-469. DOI: 10.1587/transinf.2018FCP0010
3. Katsuhisa Yamanaka, Syogo Kawaragi, and Takashi Hirayama, Exact exponential algorithm for distance-3 independent set problem, IEICE Transactions on Information and Systems, 査読有, vol.E102-D, no.3, 2019, pp.499-501. DOI:10.1587/transinf.2018FCL0002
4. Katsuhisa Yamanaka, Erik D. Demaine, Takashi Horiyama, Akitoshi Kawamura, Shin-ichi Nakano, Yoshio Okamoto, Toshiki Saitoh, Akira Suzuki, Ryuhei Uehara, and Takeaki Uno, Sequentially swapping colored tokens on graphs, Journal of Graph Algorithms and Its Applications, 査読有, vol.23, no.1, 2019, pp.3-27.DOI: 10.7155/jgaa.00482
5. Katsuhisa Yamanaka, Md. Saidur Rahman and Shin-ichi Nakano, Enumerating floorplans with columns, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, vol.E101-A, no.9, 2018, pp.1392-1397. DOI: 10.1587/transfun.E101.A.1392
6. Katsuhisa Yamanaka, Takashi Horiyama, J. Mark Keil, David Kirkpatrick, Yota Otachi, Toshiki Saitoh, Ryuhei Uehara, Yushi Uno, Swapping colored tokens on graphs, Theoretical Computer Science, 査読有, vol.729, 2018, pp.1-10. DOI:10.1016/j.tcs.2018.03.016
7. Katsuhisa Yamanaka and Shin-ichi Nakano, Enumeration, Counting, and Random Generation of Ladder Lotteries, IEICE Transactions on Information and Systems, 査読有, vol.E100-D, no.3, 2017, pp.444-451. DOI: 10.1587/transinf.2016FCP0015

〔学会発表〕（計７件）

1. Katsuhisa Yamanaka, Algorithmic enumeration of surrounding polygons, Proc. The 35th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2019), Mar, 2019.
2. Katsuhisa Yamanaka, Proc. The 30th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2018), pp.61-67, Aug, 2018.
3. Katsuhisa Yamanaka, Enumerating floorplans with columns, IEICE Technical Report, COMP2018-40, pp.55-59, 2018.
4. Katsuhisa Yamanaka, Takashi Horiyama, Takeaki Uno, Kunihiro Wasa, The complexity of ladder-lottery realization problem, IPSJ SIG Technical Report, 2018-AL-170(1), pp.1-6, Nov 2018.
5. Katsuhisa Yamanaka, On the number of edge-constrained triangulations without the general position assumption, Proc. The 30th Workshop on Circuits and Systems (KWS30), pp.165-170, 2017

6. 山中克久, トークン整列問題への誘い -あみだくじをグラフへ一般化, 電子情報通信学会技術研究報告, CAS2016-72, p.97, 2016.
7. Katsuhisa Yamanaka, Computational complexity of sequential token swapping problem, IEICE Technical Report, COMP2016-13, pp.115-121, 2016.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
○取得状況（計 0 件）

〔その他〕 とくになし.

6．研究組織
研究代表者のみから構成.

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。